3) On considère l'application g définie de $]-2,+\infty[$ vers $]2,+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{x^2+6x+10}{x+3}$

a) Montrer que $(\forall x>-3)\quad g(x)=f(x+3)$

b) Déduire que g est une bijection en déterminant sa réciproque

Exercice 7

On considère l'application f définie de $\mathbb{R}^{+}\times\mathbb{R}^{+}$ vers $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+}$ par : $f((x,y))=(x^2-y^2,xy)$

1) soit (a,b) un élément de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+}$

a) Montrer que l'équation $x^2-ax-b^2=0$ admet deux solutions distincts β ; α

b) montrer que β ; α ont des signes opposés

2) f est-elle injective ? surjective ? justifier votre réponse

Exercice 8

Soit f une application de E vers F . A et B deux parties de E

1) Montrer que : $A\subseteq B\Rightarrow f(A)\subseteq f(B)$

2) Montrer que : $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$

3) a) montrer que : $f(A\cap B)\subseteq f(A)\cap f(B)$

b) Donner une application f telle que : $f(A\cap B)\neq f(A)\cap f(B)$

c) montrer que si f est injective.alors $f(A\cap B)=f(A)\cap f(B)$

Exercice 9

E un ensemble non vide , A une partie de E .

Soit f l'application définie de $P(E)$ vers $P(A)\times P(\overline{A})$ par $f(x)=(A\cap X,X\cap\overline{A})$

☺ soit (X,Y) un élément de $P(A)\times P(\overline{A})$ déterminer $f(X\cup Y)$

☺ montrer que f est une bijection

☺ on considère l'application g définie de $P(A)\times P(\overline{A})$ vers $P(A)\times P(\overline{A})$ par :

$$g(X,Y)=(A-X,\overline{A}-Y)$$

Montrer que $f(X)=g\circ f(\overline{X})$ en déduire que g est surjective .

Exercice 10

Soit f l'application définie de $I=\mathbb{R}-\{0,1\}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$(\alpha)\quad (\forall x\in I)\quad f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=x+1$$

1) on pose $g(x)=\dfrac{x-1}{x}$ pour tout x de I

a) Vérifier que $(\forall x\in I)\ g(x)\in I$ et calculer $(g\circ g)(x)$

b) déterminer $(g\circ g\circ g)(x)$

2) a) montrer que $(\forall x\in I)\quad f(x)+f((g\circ g)(x))=\dfrac{-1}{x-1}+1$

b) calculer $f(g(x))+f((g\circ g)(x))$ en fonction de x

c) en déduire les applications f qui vérifient la relation (α)

TD-1 **Les applications** 1 BAC SM

Exercice 1 Soit l'application f définie de $]-2,2[$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{|x|}{\sqrt{4-x^2}}$

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. soit g la restriction de f sur $I=]-2,0]$

a) montrer que g est injective

b) montrer que g est une bijection de I vers $\mathbb{R}^+$ et définir sa réciproque g^{-1}

Exercice 2 On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{x}{|x|+1}$

1) montrer que f est injective

2) montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}) : |f(x)|<1$ f est-elle surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$?

3) montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$ puis définir sa réciproque f^{-1}

Exercice 3 Soit l'application f définie sur $]-\infty,-1]$ par : $f(x)=x\sqrt{x^2-1}$

1) a) montrer que f est strictement croissante sur $]-\infty,-1]$

b) déduire que f est injective

2) f est-elle surjective de $]-\infty,-1]$ vers $\mathbb{R}$?

3) montrer que f est une bijection de $]-\infty,-1]$ vers $]-\infty,0]$ et déterminer sa réciproque

Exercice 4 Soit l'application f définie de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{x^2+x}-x$.

① montrer que f est injective

② montrer que $(\forall x\in\mathbb{R}^+) : 0\leq f(x)<\frac{1}{2}$ f est-elle surjective ?

③ montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $\left[0,\frac{1}{2}\right[$ puis définir sa réciproque

Exercice 5 Soit f l'application définie de $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$

1) montrer que $(\forall x\in\mathbb{R})$ $\sqrt{x^2+1}>x$

2) a) montrer que $(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)$ $f(x)-f(y)=(x-y)\left(\frac{x+y}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}}-1\right)$

b) en déduire que f est injective

3) f est-elle surjective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$?

4) montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^{+*}$ et déterminer sa bijection réciproque

Exercice 6 Soit f l'application définie de $]1,+\infty[$ vers $]2,+\infty[$ par : $f(x)=x+\frac{1}{x}$

1) a) montrer que $(\forall x>1)$ $f(x)>2$

b) En déduire que f est surjective

c) f est-elle injective ?

2) Déduire que f est bijective puis déterminer sa réciproque

Exercice n°1 :

On considère les deux ensembles suivants : $E = \{1 ; 2 ; 3\}$ et $F = \{a ; b\}$ avec $a \neq b$

1) Déterminer toutes les applications définies de E vers F.

2) Déterminer parmi ces applications : les applications injectives et les applications surjectives.

Exercice n°2 :

On considère l'application f définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 - 4x + 1$

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = f(4 - x)$; a-t-on que f est injective ?

2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) \geq -3$; a-t-on que f est surjective ?

3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[2, +\infty[$;

Montrer que g est bijective de $[2, +\infty[$ vers $[-3, +\infty[$ puis déterminer sa bijection réciproque g^{-1}.

Exercice n°3 :

Soit l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; 1) a) Etudier la parité de la fonction f ;

b) Vérifier que : $(f(x))^2 = 1 - \frac{1}{1+x^2}$; Puis montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$;

2) a) Déterminer $f(\mathbb{R})$; Puis montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ vers $]-1, 1[$;

b) Déterminer la bijection réciproque f^{-1} de l'application f.

Exercice n°4 :

On considère l'application f définie de $[1, +\infty[$ vers $]0, \sqrt{3}]$ par : $f(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}$

1) Montrer que f est injective. 2) Montrer que : $f([1, +\infty[) =]0, \sqrt{3}]$.

3) Déduire que f est bijective en déterminant sa bijection réciproque.

Exercice n°5 :

On considère l'application f définie de $[1, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 - 2\sqrt{x-1}$

1)a) Déterminer : $f^{-1}\left(\left\{\frac{-1}{2}\right\}\right)$ b) A-t-on que f est injective ?

2)a) Montrer que : $f([1, +\infty[) = [-1, +\infty[$ b) A-t-on que f est surjective ?

3) On considère l'application g définie de $[0, +\infty[$ vers $]-1, +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 2x$

a) Déterminer une application h tel que : $f = g \circ h$

b) Montrer que g et h sont surjectives puis déduire que f est surjective.

Exercice n°6 :

On considère l'application f définie de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ par : $f(x; y) = (x^2; y+2)$

1) Montrer que f est surjective. 2) A-t-on que f est injective ?

3) On considère l'application g définie de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ par : $g(x; y) = (x^2; y+2)$

Montrer que g est bijective en déterminant sa bijection réciproque g^{-1}.

4) Déterminer toutes les applications f dans $\mathbb{R}$ vérifiant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 ; f(x)f(y) = f(xy) + x + y$.

Serie N° 3 — Les applications

Exercice ① : Soit f une application définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+x+1}$

1) a- Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{3}$

b- f est-elle injective ?

2) a- Montrer que : $f(\mathbb{R}) \subset [0 ; 4/3]$

b- f est-elle surjective ?

3) Soit g la restriction de f à $\mathbb{R}^+$. Montrer que g est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $[0 ; 1]$; puis déterminer g^{-1}.

Exercice ② : On considère l'application f définie de $]-2,2[$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{|x|}{\sqrt{4-x^2}}$

1) f est-elle injective ? f est-elle surjective ?

2) Soit g la restriction de f à $I =]-2 ; 0]$

a- Montrer que g est injective.

b- Montrer que g est bijective de I dans $\mathbb{R}^+$; puis déterminer g^{-1}.

Exercice ③ : On considère l'application f définie de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 3}{2\sqrt{x} + 2}$

1) a- Déterminer l'image réciproque de l'ensemble : $A = \{1 ; \frac{1}{2}\}$ par f.

b- f est-elle surjective ?

2) Montrer que : $f(\mathbb{R}^+) = [-\frac{3}{2} ; \frac{1}{2}[$

3) Soit g l'application définie de $\mathbb{R}^+$ dans $[-3/2 ; \frac{1}{2}[$ par : $g(x) = f(x)$.

a) Montrer que g est injective.

b) En déduire que g est bijective ; puis déterminer g^{-1}

Exercice ④ : On considère l'application f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x(1-x)^2}{(x^2+1)^2}$

1) a- Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}^* ; f(\frac{1}{x}) = f($

b- f est-elle injective ?

2) a- Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) \leq \dfrac{1}{4}$

b- f est-elle surjective ?

Exercice ⑤ : On considère l'application f définie de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2+x} - x$

1) Montrer que f est injective.

2) a- Montrerer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ ; 0 \leq f(x) < \dfrac{1}{2}$

b- f est-elle surjective ?

3) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $[0 ; \frac{1}{2}[$; puis déterminer f^{-1}.

Exercice ⑥ : On considère

l'application f définie de $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3x-1}{x+1}$$

1) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$; $f(x) = 3 - \frac{4}{x+1}$.

2) Déterminer : $f(]-\infty;-1[)$.

Exercice ⑦ : On considère l'application : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin x$

Déterminer $f^{-1}(A)$ avec : $A =]1;2]$

Exercice ⑧ : On considère l'application : $h : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [\frac{1}{4};+\infty[$, $x \longmapsto x + \sqrt{x} + \frac{1}{4}$

1) Ecrire l'application h comme la composée de deux applications f et g ; tq : $h = g \circ f$

2) Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^+$ dans $[\frac{1}{2};+\infty[$; et déterminer sa bijection réciproque

3) Montrer que g est bijective de $[\frac{1}{2};+\infty[$ dans $[\frac{1}{4};+\infty[$; et déterminer sa bijection réciproque

4) En déduire que h est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans $[\frac{1}{4};+\infty[$; et déterminer sa bijection réciproque h^{-1}.

Exercice ⑨ : On considère les deux applications f et g tq :

$f : [-1;+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$, $x \longmapsto \sqrt{x+1}$

$g : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [-1;1[$, $x \longmapsto \frac{x-2}{x+2}$.

1) Montrer que f est une bijection ; et déterminer sa bijection réciproque f^{-1}.

2) Montrer que g est une bijection ; et déterminer sa bijection réciproque g^{-1}.

3) On considère l'application : $h : [-1;+\infty[\longrightarrow [-1;1[$, $x \longmapsto \frac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{x+1}+2}$

a) Vérifier que : $h = g \circ f$.

b) En déduire que h est une bijection.

4) a- Déterminer la bijection réciproque de l'application h.

b- Vérifier que : $h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Prof : Asma OULBAZ

1bac SM