TD 1 **Barycentre** 1 SM

Exercice 1. ABC est un triangle avec E le milieu de $[AB]$. F le point tel que $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, et G le point vérifiant $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. Faire une figure
2. Démontrer que les droites (CE), (BF) et (AG) sont concourantes.

Exercice 2. ABC est un triangle tel que $AB = 6$, $AC = 4$ et $BC = 5$. G est le centre de gravité de ABC.
Déterminer et construire (ζ) l'ensemble des points M dans chaque cas :

1. $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = 6$
2. $\left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\|$
3. $\left\|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right\|$.

Exercice 3. Soient ABC un triangle et F le barycentre de $\{(A,1),(B,2),(C,1)\}$. Soient D le milieu de $[AC]$ et G le barycentre de $\{(A,5),(B,2),(C,-3)\}$.

1. Montrer que F est le milieu de $[BD]$.
2. Montrer que le quadrilatère $ACFG$ est un parallélogramme.
3. E est le milieu de $[AG]$. Montrer que E, F et G sont alignés.
4. Vérifier que $EF = \frac{1}{4}AC$.

Exercice 4. $ABCD$ un parallélogramme, E et F deux points tels que $\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AB}$ et $(1-k)\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AD}$ avec $k \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$.

1. Vérifier que C est un barycentre des points A, B et D en déterminant ses pondérations.
2. Montrer que C, E et F sont alignés.
3. Déterminer k pour que C soit le centre de $[EF]$.

Exercice 5. ABC un triangle. Soit E le barycentre de $(B,1)$ et $(C,-3)$ et soit F le barycentre de $(A,2)$ et $(B,1)$

1. Faire une figure.
2. Montrer que $(CF) \parallel (AE)$.

Exercice 6. On considère un triangle ABC du plan.

1. (a) Déterminer et construire le point G, barycentre de $\{(A,1),(B,-1),(C,1)\}$
   (b) Déterminer et construire le point G', barycentre de $\{(A,1),(B,5),(C,-2)\}$
2. (a) Soit J le milieu de $[AB]$. Exprimer $\overrightarrow{GG'}$ et $\overrightarrow{JG'}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ et en déduire l'intersection des droites (GG') et (AB).
   (b) Montrer que le barycentre I de $\{(B,2),(C,-1)\}$ appartient à (GG').
3. Soit D un point quelconque du plan. Soient O le milieu de $[CD]$ et K le milieu de $[OA]$.
   (a) Déterminer trois réels α, β et γ tels que K soit barycentre de $\{(A,\alpha),(D,\beta),(C,\gamma)\}$
   (b) Soit X le point d'intersection de (DK) et (AC). Déterminer les réels α' et γ' tels que X soit barycentre de $\{(A,\alpha'),(C,\gamma')\}$

Exercice 7. Soit ABC un triangle. Le point I est le symétrique de B par rapport à C. Le point J est le symétrique de C par rapport à A. Le point K est le symétrique de A par rapport à B. On obtient un nouveau triangle IJK.

1. Démontrer que A est le barycentre de $\{(I,2),(J,4),(K,1)\}$.
   Exprimer de même sans calculs B et C comme barycentres de I, J, K.
2. Soient P, Q, R les points d'intersection respectifs des droites (BC), (AC), (AB) avec les droites (KJ), (IK), (JI).
   (a) Démontrer que R est le barycentre de $\{(I,1),(J,2)\}$.
   (b) Énoncer les résultats analogues pour les points P et Q.
3. On donne le triangle IJK. Retrouver le triangle ABC.

Exercice 8. ABC un triangle et I un point tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et construire I.
2. Soit D le barycentre de $\{(A,-1),(B,2),(C,1)\}$, montrer que $\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$ et construire D.
3. (a) Construire les deux points E et F tels que $ACBE$ et $ADBF$ soient des parallélogramme.
   (b) Montrer que les points A, C et F sont alignés et que (EF) et (CD) sont parallèles.

Exercice 9. On considère un parallélogramme AB DC et J le milieu du coté $[AC]$.
I et I' deux points tels que $\overrightarrow{AI'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
Le point K est le quatrième point du parallélogramme $IAJK$. Soit M le barycentre de $(A, 2)$, $(B, 3)$ et $(C, 1)$.

1. Exprimer comme barycentre de A, B et C chacun des points I, J et D.
2. Montrer les relations $\overrightarrow{KI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{KB}$ et $\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{KA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KC}$. En déduire une écriture du point K comme barycentre des points A, B et C.
3. Montrer que les droites (BJ), (CI) et (DK) sont concourantes en M.
4. Montrer que les quatre points M, I', K et D sont alignés.

TD1 — Étude analytique du produit scalaire dans le plan — 1 bac SM

Dans toute la suite, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Exercice 1.
On considère les points $A(-2,0)$, $B(1,1)$ et $C(-1,3)$.
Soit $M(x,y)$ un point du plan.

1. Écrire $\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC}$ en fonction de x et y.
2. Montrer que l'ensemble des points du plan tels que
$$\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{BC} = BA^2$$
est une droite (D) à déterminer.
3. Montrer que $(D) \perp (BC)$.

Exercice 2.
On considère les deux vecteurs $\vec{u}(1, \sqrt{a})$ et $\vec{v}(a, 1)$ où $a \in \mathbb{R}^+$.

1. Montrer que $a + \sqrt{a} \leq \sqrt{1+a^2}\sqrt{1+a}$.
2. Déduire que $1 + \sqrt{a} \leq (1+a)(1+a^2)$.
3. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})$,
$$x + y \leq (1+x^2)(1+y^2)$$

Exercice 3.
A et B deux points du plan tels que $AB = 3$, I le milieu de $[AB]$ et $G = bar\{(A,1),(B,2)\}$

1. Soit (E) l'ensemble des points M tels que
$$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = 6$$
   (a) Montrer que $G \in (E)$.
   (b) Déterminer la nature de l'ensemble (E).
2. Soit (F) l'ensemble des points M tels que
$$MA^2 - MB^2 = 8$$
   (a) Vérifier que $MA^2 - MB^2 = 2\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AB}$
   (b) Déduire la nature de l'ensemble (F).

Exercice 4.
On considère le cercle (C) défini par son équation cartésienne suivante :
$$x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$$

1. Déterminer le centre et le rayon du cercle (C).
2. Déterminer les équations cartésiennes des deux droites tangentes au cercle parallèles à la droite (D) d'équation $2x - y + 2 = 0$. $\vec{n}(2;-1)$ v normal
$\vec{u}(1;-2)$ v directeur

Exercice 5.
On considère l'ensemble (C_m) définie par l'équation cartésienne
$$x^2 + y^2 - 2mx + (m+2)y - 3m - 4 = 0$$
tel que $m \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que (C_m) est un cercle en déterminant son centre et son rayon en fonction de m.
2. Déterminer (D) l'ensemble des centres des cercles quand m varie sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que tous ces cercles passent par deux points A et B fixes en les déterminant, puis vérifier que $(AB) \perp (D)$.
4. Trouver les cercles tangentes à la droite (Δ) d'équation $x + 2y + 3 = 0$.

Exercice 6.
On considère l'ensemble (C_m) définie par l'équation cartésienne
$$x^2 + y^2 - 2x - my = 0$$
tel que $m \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que (C_m) est un cercle en déterminant son centre et son rayon en fonction de m.
2. Montrer que le segment $[AB]$ tel que $A(2,0)$ et $B(0,m)$ est un diamètre du cercle (C_m).
3. Déterminer la valeur de m pour lequel la droite $(D) : y = -x$ soit tangente au cercle (C_m).
4. On suppose que dans la suite que $m = 2$
   (a) Déterminer le centre et le rayon du cercle (C_2).
   (b) Soit M un point du plan, I, J et K sont les projections orthogonales du point M sur l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite (AB). Montrer que si I, J et K sont alignés alors $M \in (C_2)$.

Exercice 7.
On considère les points $A(1,1)$, $B(2+\sqrt{3}, \sqrt{3})$ et $C(6,-4)$ et H la projection orthogonale du point B sur la droite (AC).

1. (a) Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$.
   (b) Déduire que $\sin(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
2. (a) Calculer la distance AH, puis déduire $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH})$.
   (b) Déduire les coordonnées du point H.

Exercice 8.
On considère dans le plan le cercle (C) d'équation cartésienne
$$x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$$

1. Déterminer le centre et le rayon du cercle (C).
2. On considère la droite $(D_m) : y = x + m$ avec $m \in \mathbb{R}$.
   (a) Étudier l'intersection du cercle (C) et la droite (D_m).
   (b) Soit I_m le milieu du segment $[MM']$ tel que M et M' sont les points d'intersection du cercle (C) et la droite (D_m).
   Trouver les coordonnées du point I_m, puis déterminer l'ensemble des points I_m quand m varie sur $\mathbb{R}$.

Pr.Afkir

EXERCICES A VEC CORRECTION:
BARYCENTRE

1BAC SM et SE

Exercice1 : Construire $G = Bar\{(A, 4); (B, -5)\}$

Solution : $G = Bar\{(A, 4); (B, -5)\}$ donc :

$4\overrightarrow{AG} - 5\overrightarrow{BG} = \vec{0}$

$4\overrightarrow{AG} + 5\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow -4\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = 5\overrightarrow{AB}$

Donc le point $G \in (AB)$

Exercice2 :

Construire $G = Bar\{(A, \sqrt{8}); (B, -\sqrt{2})\}$

Solution :

$G = Bar\{(A, \frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{8}); (B, \frac{1}{\sqrt{2}} \times \left(-\sqrt{2}\right))\}$

Donc : $G = Bar\{(A, 2); (B, -1)\}$

Donc : $2\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{BG} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{AG} - \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB}$ Donc $G = B$

Exercice3 : Dans le plan (P) rapporté à un repère $R\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ soient $A(3;2)$ et $B(4;1)$ et soit $G = Bar\{(A, 1); (B, -5)\}$

Déterminer les coordonnées de G

Solution : on a : $\begin{cases} x_G = \dfrac{-x_A + 5x_B}{4} \\ y_G = \dfrac{-y_A + 5y_B}{4} \end{cases}$ donc

$\begin{cases} x_G = \dfrac{17}{4} \\ y_G = \dfrac{3}{4} \end{cases}$

Donc : $G\left(\frac{17}{4}; \frac{3}{4}\right)$

Exercice4 : Soit ABC un triangle et soit :

$I = Bar\{(B, 4); (C, -3)\}$

Déterminer les coordonnées du point I dans le repère $R\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$

Solution : on a : donc $\left(4 + (-3)\right)\overrightarrow{AI} = 4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

Donc $\overrightarrow{AI} = 4\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ donc dans le repère $R\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}\right)$ $\quad I(4; -3)$

Exercice5 : E et F deux points du plan tels que : $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EF}$ et $E \notin (AB)$ et G est le barycentre des points $(A;2)$ et $(B;-3)$

1)Montrer que G est le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$

2) en déduire que les droites (EF) et (AB) se coupent et déterminer le point d'intersection

Solution : $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EF} \Leftrightarrow \overrightarrow{EG} = 2\left(\overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GF}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EG} + 2\overrightarrow{GF} \Leftrightarrow -1\overrightarrow{EG} - 2\overrightarrow{GF} = \vec{0}$

$-\overrightarrow{GE} + 2\overrightarrow{GF} = \vec{0}$ donc G est le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$

2) on a G le barycentre des points $(E;-1)$ et $(F;2)$ donc $G \in (EF)$ et on a G est le barycentre des points $(A;2)$ et $(B;-3)$ donc $G \in (AB)$

Donc les droites (EF) et (AB) se coupent en G

Exercice6 : Dans le plan (P) rapporté à un repère $\left(O; \vec{i}; \vec{j}\right)$ Soient $A(0;5)$ et $B(3;2)$

Et soit $G = Bar\{(A, 1); (B, 2)\}$

1)Déterminer les coordonnées de G

2)Déterminer et dessiner l'ensemble suivant :

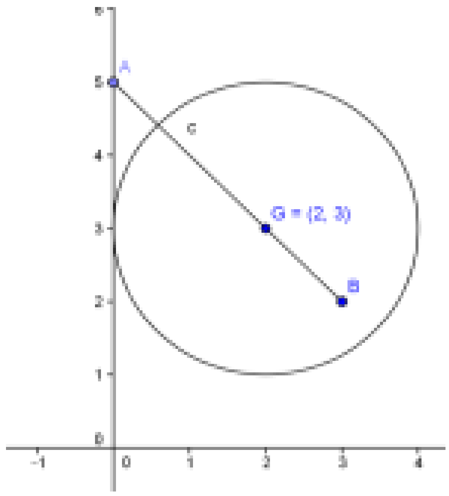
$(C) = \left\{M \in (P) / \left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| = 6\right\}$

Solution : $\begin{cases} x_G = \dfrac{0+6}{3} = 2 \\ y_G = \dfrac{5+4}{3} = 3 \end{cases}$ donc $G(2;3)$

D'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\| = 6cm \Leftrightarrow \left\|3\overrightarrow{MG}\right\| = 6cm$

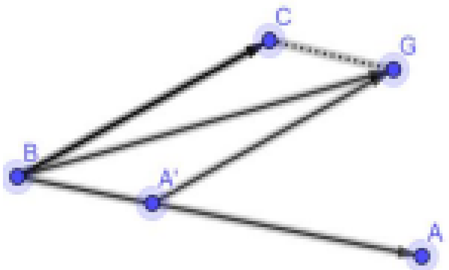
$\Leftrightarrow |3|\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = 6cm \Leftrightarrow 3MG = 6cm \Leftrightarrow MG = 2cm$

Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon $r = 2cm$

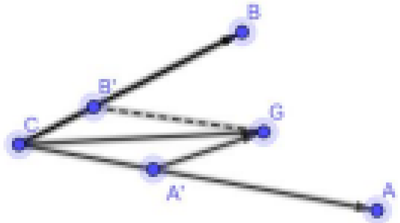


Exercice7 : soit ABC un triangle
1)Construire $G = Bar\{(A, 1); (B, -1) ; (C, 3)\}$
2)Construire $G = Bar\{(A, 4); (B, 1/2) ; (C, -3)\}$

Solution : 1)
$G = Bar\{(A, 1); (B, -1) ; (C, 3)\}$donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$(1+(-1)+3)\overrightarrow{MG} = 1\overrightarrow{MA}+(-1)\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}$
On pose : $M = B$ on aura :
$3\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA}+3\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$



2) $G = Bar\{(A, 4); (B, 1/2) ; (C, -3)\}$
Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$(4+1/2-3)\overrightarrow{MG} = 4\overrightarrow{MA}+1/2\,\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$
On pose : $M = C$ on aura :
$\frac{3}{2}\overrightarrow{CG} = 4\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CG} = \frac{8}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$



Exercice 8: Soit ABC un triangle et G point tel que : $2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB}$
1)montrer que G le barycentre de :
$\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$ et construire le point G

Solution : $2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{GB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AC}-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

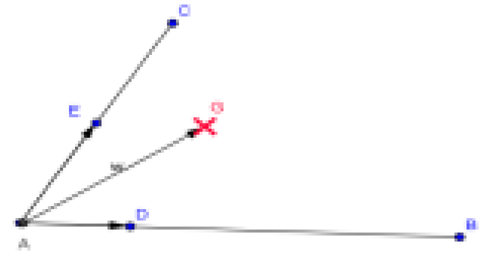
$\Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}\right)-3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow -\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

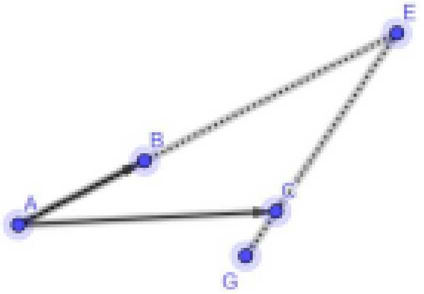
Donc G le barycentre de : $\{(A, 1); (B, 1); (C, 2)\}$

On a :® $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB}+\frac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{4}\overrightarrow{AC}$ donc : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$



Exercice 9 : On utilisant La propriété d'associativité Construire le barycentre G du système pondéré $\{(A, 2); (B, -3); (C, 5)\}$
Solution : soit E = $Bar\{(A, 2); (B, -3)\}$
d'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $-\overrightarrow{ME} = 2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}$
On pose : $M = A$ on aura : $-\overrightarrow{AE} = -3\overrightarrow{AB}$
Donc : $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB}$
d'après la Propriété d'associativité on a :
G = $Bar\{(E, -1); (C, 5)\}$
d'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $4\overrightarrow{MG} = -\overrightarrow{MA}+5\overrightarrow{MC}$
On pose : $M = E$ on aura :
$4\overrightarrow{EG} = 5\overrightarrow{EC} \Leftrightarrow \overrightarrow{EG} = \frac{5}{4}\overrightarrow{EC}$



Exercice 10 : Soit ABC un triangle.et G le centre de gravité du triangle ABC et I le milieu du segment $[BC]$. Monter que G est le centre de gravité de $(A;1)$ et $(I;2)$

Solution : G le centre de gravité du triangle ABC
Donc G est le barycentre de :
$\{(A, 1); (B, 1); (C, 1)\}$

I le milieu du segment $[BC]$ Donc I est le barycentre de : $\{(B, 1); (C, 1)\}$
D'après la Propriété d'associativité on a :
G est le barycentre de : { (I, 2); (A, 1)}

Exercice11 : Soit ABC un triangle. Pour tout point M on pose : $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}$
1) Réduire l'écriture de $\vec{V}$ et monter que $\vec{V}$ ne dépend pas du point M
2) soit K = $Bar\{(C, -3); (B, 1)\}$ montrer que : $\vec{V} = 2\overrightarrow{KA}$
3) Soit G= $Bar\{(A, 2); (B, -1); (C, -3)\}$
Montrer que : Pour tout point M on a :
$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{GM}$
4) en déduire l'ensemble des points M tel que $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\right\|$

Solution : 1)
$\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} - 3\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right)$
$\vec{V} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ donc $\vec{V}$ ne dépend pas du point M
2)on a : $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ Pour tout point M donc si $M = K$ on aura :
$2\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} - 3\overrightarrow{KC} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

Et on a : K = $Bar\{(C, -3); (B, 1)\}$ donc : $\overrightarrow{KB} - 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$

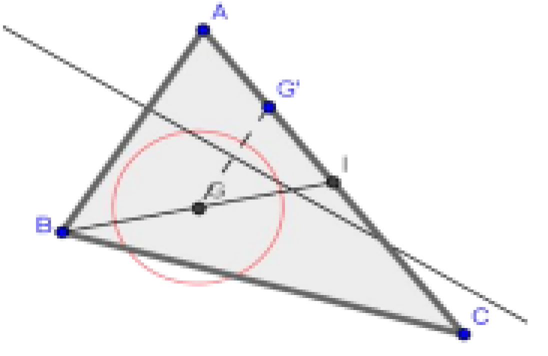
Donc : $2\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ donc : $2\overrightarrow{KA} = \vec{V}$

3) d'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \left(2 + (-1) + (-3)\right)\overrightarrow{MG} = -2\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{GM}$

4) $\left\|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}\right\|$
$\Leftrightarrow \left\|2\overrightarrow{GM}\right\| = \left\|2\overrightarrow{KA}\right\| \Leftrightarrow 2GM = 2KA \Leftrightarrow GM = KA$
Donc l'ensemble des points est le cercle (C) de centre G et de rayon $r = KA$

Exercice 12 : Soit ABC un triangle tel que : $AC = 6cm$ et $AB = 5cm$ et $BC = 4cm$
a) Construire G le barycentre de : $\{(A, 1); (B, 2); (C, 1)\}$
b) Déterminer et Construire l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = AC$
c) Déterminer et Construire l'ensemble (F) des points M du plan tel que :
$\left\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}\right\|$

Solution : G est le barycentre de : $\{(A, 1); (B, 2); (C, 1)\}$ donc G est le barycentre de : {(B, 2); (I, 2)} d'après La propriété d'associativité du barycentre
Donc G est le milieu du segment $[BI]$
b) D'après la propriété caractéristique du barycentre on a :
$\left\|4\overrightarrow{MG}\right\| = AC \Leftrightarrow GM = \frac{AC}{4} = 1.5$
Donc l'ensemble des points est le cercle de centre G et de rayon $r = 1.5cm$
b) Soit G' est le barycentre de : $\{(A, 3); (C, 1)\}$ Donc d'après la propriété caractéristique du barycentre on a : $\forall M \in (P)$
$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$ et $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG'}$
Donc : $M \in (F) \Leftrightarrow 4MG = 4MG' \Leftrightarrow MG = MG'$
Donc : (F) est la médiatrice du segment $[GG']$
Et pour construire le point G' on a : $\overrightarrow{AG'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$



Exercice13 : Dans le plan (P) rapporté à un repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ Soient $A(-1;1)$ et $B(0;2)$ et $C(1;-1)$ et $D(1;0)$ Et soit G = Bar $\{(A, 1); (B, 2)\}$
1)Déterminer les coordonnées de K = Bar $\{(A, 2); (B, 3)\}$
2)Déterminer les coordonnées de L le centre de gravité du triangle ABC
3)Déterminer les coordonnées de Barycentre des points $(A;2)$ et $(B;3)$ et $(C;1)$ et $(D;-1)$

Solution :1) $\begin{cases} x_K = \frac{-2+0}{5} = \frac{-2}{5} \\ y_K = \frac{2+6}{5} = \frac{8}{5} \end{cases}$ donc $K\left(-\frac{2}{5};\frac{8}{5}\right)$

2) les coordonnées de L sont :
$\begin{cases} x_L = \frac{1x_A + 1x_B + 1x_C}{1+1+1} \\ y_L = \frac{1y_A + 1y_B + 1y_C}{1+1+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_L = \frac{1\times(-1) + 1\times 0 + 1\times 1}{1+1+1} = 0 \\ y_L = \frac{1\times 1 + 1\times 2 + 1\times(-1)}{1+1+1} = \frac{2}{3} \end{cases}$

Donc $L\left(0;\frac{2}{3}\right)$

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{ax_A + bx_B + cx_C + dx_D}{a+b+c+d} \\ y_G = \dfrac{ay_A + by_B + cy_C + dy_D}{a+b+c+d} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{2\times x_A + 3\times x_B + 1\times x_C + (-1)\times x_D}{5} = \dfrac{-2}{5} \\ y_G = \dfrac{2\times y_A + 3\times y_B + 1\times y_C + (-1)\times y_D}{5} = \dfrac{7}{5} \end{cases}$$

$G\left(-\frac{2}{5};\frac{7}{5}\right)$

Exercice14 : Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe

Soit H le barycentre du système pondéré $\{(A, 2) ; (B, 5); (C, -1)\}$

Soit K le barycentre du système pondéré $\{(B, 5) ; (C, -1) ; (D, 6)\}$

Soit E = Bar $\{(C, -1) ; (B, 5)\}$

1)Montrer que $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et Construire E

2) Montrer que H est le barycentre du système pondéré $\{(A, 1) ; (E, 2)\}$ et Construire H

3) Montrer que K est le barycentre du système pondéré $\{(D, -3) ; (E, 2)\}$

4) a) Montrer que D est le barycentre du système pondéré $\{(K, 1) ; (E, 2)\}$

b) en déduire que $(AK) \parallel (DH)$

Solution :

1)On sait que si M est un point quelconque dans le plan (P) on a :

$$\overrightarrow{ME} = \frac{1}{4}\left(5\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\right)$$

Pour : M=B on a : $\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ et on peut Construire E

2) On a : E = Bar $\{(C, -1) ; (B, 5)\}$ et $5+(-1)=4$

D'après La propriété d'associativité on a H le barycentre du système pondéré $\{(A, 2); (E, 4)\}$ et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que H est le barycentre du système pondéré $\{(A, 1) ; (E, 2)\}$

On sait que si M est un point quelconque dans le plan (P) on a :

$$\overrightarrow{MH} = \frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MA}\right)$$

Pour : M=A on a : $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ et on peut Construire E

3) D'après La propriété d'associativité on trouve que K le barycentre du système Pondéré $\{(D, -6); (E, 4)\}$

Et puisque Le barycentre d'un système pondéré ne varie pas si on multiplie les poids par le même réel non nul on trouve donc que K est le barycentre du système pondéré $\{(D, -3) ; (E, 2)\}$

4) a) Montrons que D est le barycentre du système pondéré $\{(K, 1) ; (E, 2)\}$?

Puisque K est le barycentre du système pondéré $\{(D, -3) ; (E, 2)\}$

Pour tout point M du plan (P) on a :

$-\overrightarrow{MK} = -3\overrightarrow{MD} + 2\overrightarrow{ME}$

Donc : $3\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MK} + 2\overrightarrow{ME}$

Donc : D est le barycentre du système pondéré $\{(K, 1) ; (E, 2)\}$

4) b) Pour tout point M du plan (P) on a :

$3\overrightarrow{MH} = 2\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MA}$ et $3\overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MK}$

Donc : $3\overrightarrow{DH} = 3\overrightarrow{MH} - 3\overrightarrow{MD}$:

$3\overrightarrow{DH} = 3\left(\overrightarrow{MH} - \overrightarrow{MD}\right)$

Donc : $3\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MK}$

Donc : $3\overrightarrow{DH} = -\overrightarrow{AK}$ Donc : $(AK) \parallel (DH)$

Exercice15 : ABC un triangle

I et J et K points tels que : $2\overrightarrow{BI} = 3\overrightarrow{BC}$

Et $8\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CA}$ et $5\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AB}$

1) Montrer que I est le barycentre des points pondéré $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$

2) le plan (P) est rapporté au repère $R\left(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

a) Déterminer les coordonnées du point J

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (IK)

c) Montrer que les points I et J et K sont alignés.

Solution :1)

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{BI} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BI} - \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{BI} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{BI} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \vec{0}$$

Donc : $\frac{1}{2}\overline{BI}-\frac{3}{2}\overline{CI}=\vec{0}$ par suite : I est le barycentre des points pondéré $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$

2) dans le repère $R\left(A;\overline{AB};\overline{AC}\right)$ on a : $A(0;0)$ et $B(1;0)$ et $C(0;1)$

a) On a : $8\overline{CJ}=\overline{CA}$ donc : $8\overline{CA}+8\overline{AJ}=\overline{CA}$

Donc : $8\overline{AJ}=-7\overline{CA}$ donc : $\overline{AJ}=\frac{7}{8}\overline{AC}$

Donc : $J\left(0;\frac{7}{8}\right)$

b) la droite (IK) passe par I et de vecteur directeur

$\overline{IK}$ et on a : I est le barycentre de $\left(B;\frac{1}{2}\right)$ et $\left(C;\frac{-3}{2}\right)$ donc : $\begin{cases} x_I=\dfrac{\frac{1}{2}\times 1-\frac{3}{2}\times 0}{-1}=-\dfrac{1}{2} \\ y_I=\dfrac{\frac{1}{2}\times 0-\frac{3}{2}\times 1}{-1}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Donc : $I\left(\frac{-1}{2};\frac{3}{2}\right)$

Et on a : $5\overline{AK}=2\overline{AB}$ Donc : $\overline{AK}=\frac{2}{5}\overline{AB}$

Donc : $K\left(\frac{2}{5};0\right)$ Donc : $\overline{IK}\left(\frac{9}{10};\frac{3}{2}\right)$

L'équation cartésienne de la droite (IK) est :

$\frac{3}{2}x-\frac{9}{10}y+c=0$

$I\in(IK)$: donc : $\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{9}{10}\left(\frac{3}{2}\right)+c=0$

$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}-\frac{27}{20}+c=0 \Leftrightarrow c=\frac{21}{10}$

Donc : (IK): $\frac{3}{2}x-\frac{9}{10}y+\frac{21}{10}=0$

(IK): $15x-9y+21=0$

c) pour Montrer que les points I et J et K sont alignés il suffit de montrer que $J\in(IK)$

On a : (IK): $15x-9y+21=0$ et $J\left(0;\frac{7}{8}\right)$

Et on a : $15\times 0-9\frac{7}{8}+21=-21+21=0$

Par suite : $J\in(IK)$ donc les points I et J et K sont alignés.

Exercice16 : ABC un triangle et I un point tel que : $\overline{AI}=\frac{2}{3}\overline{AB}$ et K le symétrique de A par rapport a C et J le milieu du segment $[BC]$

1) exprimer I et J et K comme le barycentre de points pondérés a déterminer

2)quelle est le barycentre des points pondérés $(A;1)$; $(B;2)$; $(B;-2)$ et $(C;-2)$?

3)Monter que les points I et J et K sont alignés.

Solution :1)

• On a J le milieu du segment $[BC]$

Donc : J est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$

• On a : $\overline{AI}=\frac{2}{3}\overline{AB}\Leftrightarrow 3\overline{AI}=2\overline{AB}\Leftrightarrow 3\overline{AI}=2\overline{AI}+2\overline{IB}$

$\Leftrightarrow \overline{IA}+2\overline{IB}=\vec{0}$ Donc : I est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(B;2)$

• On a : K le symétrique de A par rapport a C

Donc : $2\overline{KC}=\overline{KA}$

Donc : $\overline{KA}-2\overline{KC}=\vec{0}$

Donc : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(C;-2)$

2) on a : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(C;-2)$ donc :

$1\overline{KA}+2\overline{KB}-2\overline{KB}-2\overline{KC}=\vec{0}$

Donc : K est le barycentre des points pondéré $(A;1)$ et $(B;2)$ et $(B;-2)$ et $(C;-2)$

3) D'après La propriété d'associativité on trouve que K le barycentre des points pondéré $(J;-4)$ et $(I;3)$ par suite : $K\in(IJ)$ donc les points I et J et K sont alignés.

Exercice17 : ABCD un carré et I et J les milieux respectivement des segments $[BC]$ et $[CD]$ et M et N deux points tel que : $\overline{AM}=\frac{1}{4}\overline{AB}$ et $\overline{AN}=\frac{1}{4}\overline{AD}$

1determiner le barycentre des points pondérés {(A, 3) ; (B, 1)} et {(A, 3) ; (D, 1)}

2)soit G le barycentre des points pondérés $(A;3)$; $(B;1)$; $(C;1)$ et $(D;1)$

3)Monter que les droites (MJ) et (NI) et (AC) sont concourantes en G

Solution :1) On a :

$\overline{AM}=\frac{1}{4}\overline{AB}\Leftrightarrow 4\overline{AM}=\overline{AM}+\overline{MB}$

Donc : $3\overline{MA}+\overline{MB}=\vec{0}$

Donc : M est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(B;1)$

De même on a : $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{ND}$

Donc : $3\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{ND}=\vec{0}$

Donc : N est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(D;1)$

2) soit G le barycentre des points pondérés $(A;3)$;$(B;1)$; $(C;1)$ et $(D;1)$ et puisque J le milieu du segment $[DC]$ alors J est le barycentre des points pondéré $(C;1)$ et $(D;1)$

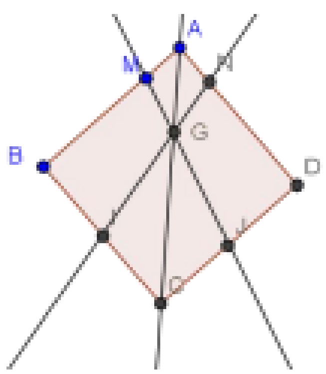
D'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(M;4)$ et $(J;2)$ par suite : $G\in(JM)$

De même on a : le milieu du segment $[BC]$ alors est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$ et d'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(N;4)$ et $(I;2)$ par suite : $G\in(NI)$

Soit H le centre de gravité du triangle BCD donc

H est le barycentre des points pondéré $(B;1)$ et $(C;1)$ et $(D;1)$ par suite D'après La propriété d'associativité on trouve que G est le barycentre des points pondéré $(A;3)$ et $(H;3)$ donc : G le milieu du segment $[AH]$ et puisque ABCD est un carré alors : $H\in[AC]$ donc $G\in(AC)$

Conclusion : les droites (MJ) et (NI) et (AC) sont concourantes en G



Exercice18: et deux points tel que : $AB=4cm$ et soit :(F) l'ensemble des points M du plan tel que : $\frac{MA}{MB}=3$

1)Montrer que : $M\in(F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2-9\overrightarrow{MB}^2=0$

2)Soit G le barycentre des points pondérés ; et K le barycentre des points pondérés ;$(B;-3)$

a) Montrer que : $M\in(F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MK}=0$

b) En déduire l'ensemble(F) et le tracer

Solution :1) $M\in(F) \Leftrightarrow \frac{MA}{MB}=3 \Leftrightarrow MA=3MB$

$M\in(F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2-9\overrightarrow{MB}^2=0$

2)a)

$M\in(F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2-9\overrightarrow{MB}^2=0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right)=0$

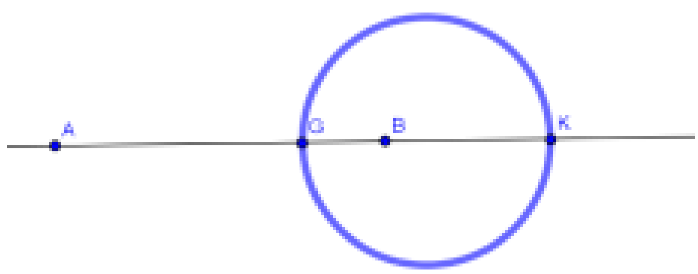
et d'après La propriété caractéristique du barycentre on aura :

$\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=4\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MK}$

Donc : $M\in(F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2-9\overrightarrow{MB}^2=0 \Leftrightarrow -8\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MK}=0$

Donc : $M\in(F) \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MK}=0$

2)b) d'après a) en déduit que(F) est le cercle de dont un diamètre est $[GK]$



Exercice19: et deux points tel que : $AB=4cm$ et le milieu du segment

1)Soit :(E)l'ensemble des points M du plan tel que : $\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}=4$ et soit H le barycentre des points pondérés ;

a) Montrer que : $H\in(E)$

b) Vérifier que : $M\in(E) \Leftrightarrow \overrightarrow{HM}\cdot\overrightarrow{AB}=0$

c)déterminer la nature de l'ensemble(E)

2)soit :(F)l'ensemble des points M du plan tel que : $MA^2-MB^2=8$

a) Montrer que : $\forall M\in(P)$ on a : $MA^2-MB^2=2\overrightarrow{IM}\cdot\overrightarrow{AB}$

b) En déduire que$(F)=(E)$ et le tracer

Solution :1) On a : H le barycentre des points pondérés ; donc : $\overrightarrow{AH}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Et on a $\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AH}$ donc $\overrightarrow{IH} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

Donc $\overrightarrow{IH} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ par suite $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}AB^2 = 4$

Donc $H \in (E)$

b) $M \in (E) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{IM} - \overrightarrow{IH}\right) \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

c)de b) on déduit que (E) est la droite perpendiculaire a (AB) en H

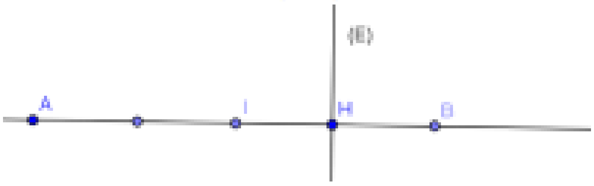
2)a) $MA^2 - MB^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) = 2\overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{AB}$

Car d'après La propriété caractéristique du barycentre on a : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$

2)b)

$M \in (F) \Leftrightarrow MA^2 - MB^2 = 8 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \Leftrightarrow M \in (E)$

Donc $(F) = (E)$ par suite (F) est la droite perpendiculaire a (AB) en H



Serie N° 5 — Le Barycentre

Exercice ①:

On considère dans le plan un triangle ABC ; et J un point tel que : $\overrightarrow{CJ} = 2\overrightarrow{CA}$ et $G = Bary\{(A;2);(B;1);(C;-1)\}$

1) Construire le point J ; puis montrer que :
$J = Bary\{(A;-2);(C;1)\}$

2) Construire le point K tel que : $K = Bary\{(A;2);(B;1)\}$

3) Montrer que les deux droites (CK) et (BJ) se coupent en G.

4) Montrer que : $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{AG}$

5) Montrer que le point K est le centre d'inertie du triangle BCJ

Exercice ②:

$ABCD$ un quadrilatère ; et I le milieu du segment $[AC]$; et J le milieu du segment $[BD]$; et K un point tel que : $\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$; et L un point tel que : $\overrightarrow{LC} = -2\overrightarrow{LD}$; et N le milieu de $[KL]$

1) Vérifier qu'il existe un point G du plan ; tel que :
$G = Bary\{(A;1);(B;2);(C;1);(D;2)\}$

2) En utilisant l'associativité ; montrer que : G est l'intersection des deux droites (KL) et (IJ).

3) Montrer que : $G = N$; puis en déduire que les points N et I et J sont alignés.

4) a - Déterminer l'ensemble des points M du plan qui vérifient : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$.

b - Déterminer l'ensemble des points M du plan qui vérifient $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD}\| = 6$.

Exercice ③:

ABC est un triangle tel que $AC = 6\text{ cm}$; $AB = 5\text{ cm}$; $BC = 4\text{ cm}$

1) Construire le point G ; le barycentre de $(A;1);(B;2);(C;1)$

2) Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan qui vérifient :
$\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = AC$

3) Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M du plan qui vérifient :
$\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MC}$

Exercice ④:

ABC est un triangle ; et m un nombre réel.
Soit M un point tel que :
$M = Bary\{(A;2);(B;m);(C;-m)\}$

1) a - Ecrire $\overrightarrow{AM}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$ et m.

b - Déduire l'ensemble des

points M ; lorsque m varie dans $\mathbb{R}$.

2) Le plan est rapporté au repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

On prends : $m = 1$; et on pose : $M = G$

a) Déterminer les coordonnés du point G.

b) Montrer que : $x - y - 1 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (BG).

c) En déduire le couple des coordonnés du point J ; l'intersection des deux droites (AC) et (BG).

d) Soit I le point d'intersection des deux droites (AB) et (CG). Prouver que le point I est le centre d'inertie du triangle JBC.

Exercice 5 :

A et B deux points du plan tels que : $AB = $ cm

Soit (F) l'ensemble des points M du plan qui vérifient : $\frac{MA}{MB} = 3$

1) Montrer que :

$M \in (F) \iff \overrightarrow{MA}^2 - 9\overrightarrow{MB}^2 = 0$

2) Soit G un point du plan tel que : $G = \text{Bary}\{(A;1);(B;3)\}$ et soit K un point du plan tel que : $K = \text{Bary}\{(A;1);(B;-3)\}$

a) Montrer que :

$M \in (F) \iff \overrightarrow{MG}\cdot\overrightarrow{MK} = 0$

b) En déduire l'ensemble (F).

c) Construire l'ensemble (F).

Prof : Asma OULBAZ

17/11/22

1Bac

Prof: Asma OULBAZ | Série N: 7 — étude analytique du produit scalaire | 1bac SM 01/12/2022

Exercice ①:

Résoudre graphiquement le système suivant :

$$\begin{cases} x^2+y^2+2y-5>0 \\ x^2+y^2-2x-6y+6<0 \end{cases}$$

2) étudier la position relative de la droite (D) et le cercle ($\mathcal{C}$) tq :

$(D): 3x-4y-12=0$

$(\mathcal{C}): \begin{cases} x = 2+2\cos t \\ y = 4+2\sin t \end{cases} \quad / t \in \mathbb{R}$

3) Calculer : $\cos(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$ et $\sin(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}})$ sachant que $A(1;1)$ et $B(2+\sqrt{3};\sqrt{3})$ et $C(6;-4)$

Exercice ②: soit ($\mathcal{C}$) un cercle définie par l'équation cartésienne suivante.

$x^2+y^2+4x+4y-2=0$

et $(D): x+3y-2=0$

1) Montrer que (D) est la tangente au cercle ($\mathcal{C}$)

2) Déterminer les coordonnées de pt A l'intersection de (D) et ($\mathcal{C}$)

Exercice ③:

Soit $A(1;4)$, et $B(-1;2)$ et $\Omega(1;2)$ trois pts du plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

et la droite (D) d'équation cartésienne

$(D): 2x-y=0$

1) Montrer que le triangle ΩAB est isocèle rectangle en pt Ω

2) Déterminer l'équation cartésienne de la droite (Δ) la médiatrice du $[AB]$

3) (D) et (Δ) sont-ils perpendiculaire

4) Déterminer l'équation cartésienne du cercle ($\mathcal{C}$) de centre Ω et passant par B.

5) Déterminer les équations des deux tangentes à ($\mathcal{C}$) et parallèles à (D)

6) selon les valeurs du paramètre m discuter la position relative de ($\mathcal{C}$) et (D_m) tq : $(D_m): 2x-y+m=0$

Exercice ④ On considère deux pts : $A(0;-3)$ et $B(2;-1)$ et la droite (D) d'équation cartésienne :

$(D): y+3=0$

1) Déterminer l'équation cartésienne de la droite (Δ) la médiatrice du $[AB]$

2) Déterminer le centre et le rayon du cercle ($\mathcal{C}$) tq $A \in (\mathcal{C})$ et $B \in (\mathcal{C})$ et $\Omega \in (D)$.

3) étudier l'intersection de ($\mathcal{C}$) avec les axes du repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

4) Déterminer les équations des

Suite ex 4 :

4) Déterminer les équations de deux tangentes à $(\mathcal{C})$ de vecteur directeur $\vec{u}(3;1)$

5) Déterminer les équations des deux tangentes à $(\mathcal{C})$ passant par le pt $C(2;1)$

Exercice 5 : pour m un paramètre réel, On considère $(\mathcal{C}_m)$ l'ensemble des pts $M(x;y)$ du plan vérifiant :

$$x^2+y^2-mx+my+2m-2=0$$

1) Montrer que pour toute valeur réelle prise par le paramètre m ; $(\mathcal{C}_m)$ est un cercle en précisant son centre Ω_m et son rayon R_m

2) Déterminer l'ensemble des pts Ω_m lorsque m varie dans $\mathbb{R}$

3) Montrer que tous les cercles $(\mathcal{C}_m)$ tangentes à la droite (Δ) (Déterminer l'équation cartésienne de (Δ))

4) Montrer que tous les cercles $(\mathcal{C}_m)$ passant par le pt A

[illegible] : les parties A, B, C et D sont indépendantes.

Soit A et B deux pts du plan tel que $AB = 4$ cm et I le milieu du segment $[AB]$

On note G et H les barycentres respectifs des systèmes $\{(A;1);(B;3)\}$ et

Partie A : On considère l'ensemble $\mathcal{C}_1 = \{M \in \mathcal{P} / \frac{MA}{MB} = 3\}$

1) Montrer que $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \vec{MG}\cdot\vec{MH} =$

2) déduire la nature de l'ensemble.

Partie B : On considère $\mathcal{C}_2 = \{M \in \mathcal{P} / \vec{IM}\cdot\vec{AB} = 4\}$

1) justifier que $G \in \mathcal{C}_2$

2) Etablir l'équivalence : $M \in \mathcal{C}_2 \Leftrightarrow \vec{GM}\cdot\vec{AB} = 0$

3) déduire la nature de l'ensemble $\mathcal{C}_2$

Partie C : On considère l'ensemble $\mathcal{C}_3 = \{M \in \mathcal{P} / MA^2 - MB^2 = 8\}$

1) Montrer que pour tout pt M du plan $MA^2 - MB^2 = 2\vec{IM}\cdot\vec{AB}$

2) déduire que $\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}_2$

Partie D : On considère l'ensemble $\mathcal{C}_4 = \{M \in \mathcal{P} / MA^2 + MB^2 = 10\}$

1) Montrer que pour tout pt M du plan : $M \in \mathcal{C}_4 \Leftrightarrow MI = 1$

2) déduire la nature de l'ensemble $\mathcal{C}_4$

Exercice N°1 :

On considère les points $A(2,1)$, $B(1,-2)$ et $C(-1,2)$

1- a- Déterminer une équation cartésienne de la droite (BC)

b- Montrer que le triangle ABC est rectangle isocèle en A

2- a- Déterminer une équation cartésienne du cercle (C) circonscrit au triangle ABC

b- Montrer que la droite (Δ) d'équation : $x+2y+5=0$ est tangente au cercle (C) puis déterminer les coordonnées du point E, le point de contact de (C) avec (Δ)

3- a- Déterminer les coordonnées du point F le point d'intersection de (Δ) et (BC)

b- Montrer que l'équation de la deuxième tangente (Δ) au cercle (C) qui passe par F est : $11x-2y-25=0$

Exercice N°2 :

On considère les points $\Omega(1,2)$, $D(-2,-2)$

1- Déterminer une équation cartésienne du cercle (C) de centre Ω et qui passe par le point D

2- On considère les points $A(-3,5)$, $B(5,-1)$

Vérifier que $[AB]$ est un diamètre du cercle (C)

3- Soit (Δ) la droite d'équation : $4x-3y+27=0$

Montrer que (Δ) est tangente au cercle (C) en A

4- Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) au cercle (C) au point D

5- Vérifier que les tangentes (Δ) et (T) au cercle (C) se coupent au point $I(-6,1)$

6- a- Calculer les distances BD et ΩI

b- Calculer les produit scalaire : $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega I}$

c- Calculer $\det(\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD})$ et $\det(\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega I})$

d- Montrer que les angles orientés $(\widehat{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BD}})$ et $(\widehat{\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega I}})$ ont même mesure modulo 2π

Exercice N°3: Soit $ABCD$ un parallélogramme. On Considère les points P, Q et R définis par :

$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AR}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ et $PQRA$ est parallélogramme.

1- a – Montrer que le point P est le barycentre des points A et B affectés à des coefficients à déterminer.

b - Montrer que le point R est le barycentre des points A et D affectés à des coefficients à déterminer.

2- Soit I est le point d'intersection des droites (BR) et (DP).

Montrer que le point I est le barycentre des points A, B et D affectés à des coefficients à déterminer.

3- Montrer que le point Q est le barycentre des points $(A,-5)$, $(B,8)$ et $(D,9)$

4- En déduire que Q est le milieu du segment $[CI]$ et que les droites (CQ), (BR) et (DP) sont concourantes

Exercice : 1 : 4 points

Soit ABC un triangle.

1) Construire G le barycentre des points pondérés $(A;2)$, $(B;-2)$ et $(C;3)$.
2) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires.
3) Soit K le point intersection de (BG) et (AC). Monter que K est le barycentre des deux points pondérés $(A;\frac{2}{3})$ et $(C;1)$
4) Donner les coordonnées de K et G dans le repère $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$.

Exercice : 2 : 4 points

Soit ABC un triangle et G le barycentre des points pondérés $(A;-2)$, $(B;-4)$ et $(C;3)$. I le point du plan tel que $\overrightarrow{AI}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.

1) a-Montrer que $\overrightarrow{AG}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.
   b-En déduire la nature du quadrilatère $ACIG$.
2) Soit J le point intersection de (IG) et (BC).
   a-Calculer $\overrightarrow{BJ}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.
   b-Montrer que $\overrightarrow{GJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

Exercice : 3 : 9 points

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points $\Omega(2;0)$, $A(2;2)$, $B(4;2)$ et $C(3;2+\sqrt{3})$.

1) Calculer les distances AB, AC et BC puis déduire la nature du triangle ABC.
2) Soit α la mesure principale de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{\Omega B};\overrightarrow{\Omega C}})$.
   Calculer $cos(\alpha)$ et $sin(\alpha)$ puis déduire la valeur de α.
3) Soit I le milieu du segment $[BC]$
   a-Donner l'équation cartésienne de (Δ) la médiatrice du segment $[BC]$
   b-Vérifier que A est un point de (Δ).
4) Soit $(\mathscr{F})$ l'ensemble de points $M(x;y)$ du plan tels que $x^2+y^2-2x-4y+1=0$ et $A(-3;2)$ un point du plan.
   a-Montrer que $(\mathscr{F})$ est un cercle $(\mathscr{C})$ dont il faut déterminer le centre et le rayon.
   b-Montrer que A est à l'extérieur de $(\mathscr{C})$.
   c-Déterminer les équations cartésiennes des deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées passant par A et tangentes à $(\mathscr{C})$.

Exercice : 4 : 3 points

Dans le plan menu d'un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$, on considère les points $A(1;2)$ et $B(-2;-1)$. Soit E l'ensemble des point $M(x;y)$ du plan tels que $MA=2MB$.

1) Montrer que $M\in(\mathscr{E}) \iff (\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB})=0$.
2) Soient I le barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;-2)$ et J le barycentre des points pondérés $(A;1)$, $(B;2)$.
   Montrer que $M\in(\mathscr{E}) \iff \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MJ}=0$
3) Déduire l'ensemble $(\mathscr{E})$