CALCUL TRIGONOMETRIQUE

A) Formules de transformations :

1) Pour tous réels x et y on a :

$\cos(x-y) = \cos x.\cos y + \sin x.\sin y$ (1)

$\cos(x+y) = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$ (2)

$\sin(x+y) = \sin x.\cos y + \cos x.\sin y$ (3)

$\sin(x-y) = \sin x.\cos y - \cos x.\sin y$ (4)

Pour tout réel x on a :

$\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$ et $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$

$\sin(2x) = 2\sin x.\cos x$

$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$

$\cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2} - 1$ $\quad\cos x = 1 - 2\sin^2\dfrac{x}{2}$

$\sin x = 2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$

2) Formules de la tangente.

Soient x et y deux réels tels que :

$x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ et $y \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ on a :

1) Si $(x+y) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ alors $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \times \tan y}$

2) si $x \neq \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2}$ alors : $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

3) Si $(x-y) \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ alors :

$\tan(x-y) = \dfrac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \times \tan y}$

3) Les valeurs trigonométrique en fonction de : $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

Soit x un réel tel que : $x \neq \pi + 2k\pi$ On posant :

$t = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ Si de $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ et $x \neq \pi + 2k\pi$ on a :

1) $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ $\quad$ 2) $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ $\quad$ 3) $\tan x = \dfrac{2t}{1-t^2}$

4) Transformations des sommes en produits

Pour tous réels p , q, on a :

$\sin p + \sin q = 2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right).\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

$\sin p - \sin q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right).\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right).\cos\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

$\cos p - \cos q = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right).\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$

5) Transformations des produits en sommes.

Pour tous réels x, y on a :

$\cos x.\cos y = \dfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$

$\sin x.\sin y = -\dfrac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

$\sin x.\cos y = \dfrac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$

La linéarisation d'une expression c'est de l'écrire sous la forme d'une somme.

B) LES EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES.

1) Rappelles : $k \in \mathbb{Z}$

a) $\cos x = \cos x_0 \Leftrightarrow x = x_0 + 2k\pi$ ou $x = -x_0 + 2k\pi$

b) $\sin x = \sin x_0 \Leftrightarrow x = x_0 + 2k\pi$ ou $x = \pi - x_0 + 2k\pi$

c) $\tan x = \tan x_0 \Leftrightarrow x = x_0 + k\pi$

2) L'équation : (E): $a\cos x + b\sin x + c = 0$

Soient a et b deux réels non nuls on a :

Pour tout réel x :

$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x\right)$

$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x\right)$

où le réel φ est déterminer par :

$\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi)$

L'équation $a\cos x + b\sin x + c = 0$ se ramène à :

$\cos(x-\varphi) = \dfrac{-c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Exercice I Soit $x \in \mathbb{R}$, ·On pose: $A(x) = \cos(2x) + \cos x - \sin x$

1. Montrer que: $A(x) = (\cos x - \sin x)(1 + \cos x + \sin x)$

2. Déduire que: $A(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

3. Résoudre dans R l'équation: $A(x)=0$

Exercice II Soit $x \in \mathbb{R}$, ·On pose: $A(x) = \cos^3 x + \sin^3 x - \frac{3\sqrt{2}}{4}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

1. Montrer que: $\cos^3 x + \sin^3 x = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)(2 - \sin 2x)$

2. a) Montrer que: $A(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)\left(\frac{1}{2} - \sin 2x\right)$

   b) Déduire que: $A(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{2} - \sin 2x\right)$

3. Résoudre dans $[\pi, 2\pi]$ l'équation: $A(x)=0$

Exercice III Soit $x \in \mathbb{R}$, ·On pose: $A(x) = 2\cos^3 x - 2\sin^2 x.\cos x - \cos x + \sin x$

1. Montrer que: $A(x) = (\cos x - \sin x)(\cos 2x + \sin 2x)$

2. Déduire que: $A(x) = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

3. Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation: $A(x)=0$

Exercice IV Soit $x \in \mathbb{R}$, ·On pose: $A(x) = 2\cos^3 x - 2\sin^3 x - \cos x + 2\sin x$

1. Montrer que: $A(x) = -2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{3x}{2}\right) - \sin\left(\frac{x}{2}\right)\right)$ et $\sin x - 2\sin^3 x = \frac{1}{2}\cos x.\sin 2x$

2. Montrer que: $A(x) = \sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).\cos x$

3. Résoudre dans $[-\pi, \pi]$ l'équation: $A(x)=0$

Exercice IV Soit $x \in \mathbb{R}$, On pose: $A(x) = 1 - 2\cos x + \cos 2x$ et $B(x) = 1 + 2\cos x + \cos 2x$

1. Montrer que: $2\cos^3 x - \cos x = \cos 2x.\cos x$ et $B(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{3x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$

2. Montrer que: $A(x) = -4\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos x$ et $B(x) = 4\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos x$

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $A(x)=0$ et $B(x)=0$

4. 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations : $B(x)= A(x)$

Exercice I

1. Résoudre dans l'intervalle I indiqué les équations suivantes:

a) $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $I=[0,2\pi]$ b) $\sin(2x)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $I=[-\pi,\pi]$

c) $\cos x-\sin x=0$ et $I=[0,2\pi]$ d) $\sqrt{3}\sin(2x)+\cos(2x)=1$ et $I=[-\pi,\pi]$

2. Résoudre dans l'intervalle I indiqué les inéquations suivantes:

c) $\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)>1$ et $I=[0,\pi]$ d) $2\cos^2 x-\cos x\leq 0$ et $I=[-\pi,0]$

Exercice II Soit $x\in\mathbb{R}$, On pose: $A(x)=\cos(2x)+\cos x-\sin x$

1. Montrer que: $A(x)=(\cos x-\sin x)(1+\cos x+\sin x)$
2. a) Montrer que: $1+\cos x+\sin x=1+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$

   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $A(x)=0$

   c) Résoudre dans l'intervalle $[0,\pi]$ l'inéquation : $A(x)>0$

Exercice III On considère l'équation $(E):\sin(2x)+\cos x+\sin x+1=0$

1. Montrer que: $(\cos x+\sin x)^2=1+\sin(2x)$
2. a) Montrer que: $(E)\Leftrightarrow(\cos x+\sin x)(1+\cos x+\sin x)=0$

   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E)

   c) Résoudre dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation : $\sin(2x)+\cos x+\sin x+1>0$

Exercice IV Soit $x\in\mathbb{R}$, On pose: $A(x)=2\sqrt{3}\sin^2 x-\sin(2x)+\cos x-\sqrt{3}\sin x$

1. Montrer que: $A(x)=(1-2\sin x)(\cos x-\sqrt{3}\sin x)$
2. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $\cos x-\sqrt{3}\sin x=0$

   b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $A(x)=0$
3. Résoudre dans $[0,\pi]$ l'inéquation: $A(x)<0$

Exercice V Soit $x\in\mathbb{R}$, On pose: $A(x)=\cos^2 x+\cos^2(2x)+\cos^2(3x)$

1. a) Montrer que: $\cos^2 x+\cos^2(3x)=\frac{1}{2}(2+\cos(2x)+\cos(6x))$

   b) Déduire que: $A(x)=1+2\cos x\,.\cos(2x).\cos(3x)$
2. Résoudre dans $[0,\pi]$ l'équation: $A(x)=1$
3. On pose : $E=\cos\frac{\pi}{7}\,.\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right).\cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$

   a) Calculer $E.\sin\frac{\pi}{7}$, en déduire que : $E=\frac{1}{8}$

   b) Déduire la valeur de $A\left(\frac{\pi}{7}\right)$