Dénombrement

Prof: Asma OULBAZ

Exercice ①: Soient A et B et C trois ensembles finis.

1) Calculer : card $(A - B)$ et card $(A \Delta B)$ en fonction de card(A) et card(B) et card$(A \cap B)$

2) Montrer que : card $(A \cup B \cup C)$ $= \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C) - \text{card}\, B \cap C$.

Exercice ②: Une urne contient 9 boules numérotées comme suit : 4 Boules rouges numérotées 0 ; 1 ; 1 ; 2 ; et 3 boules vertes numérotées 1 ; 2 ; 2 et deux boules noires numérotées 1 ; 3.

On tire au hasard trois boules de l'urne ; et on considère les situations suivantes :

A : "Obtenir trois boules de couleurs deux à deux distinctes".

B : "Obtenir trois boules portant le même numéro".

C : "La somme des numéros obtenus est égale à 4".

D : "Obtenir au moins une boule rouge".

Calculer le nombre de cas possibles vérifiés pour chacune des situations dans chacun des cas suivants :

1) Tirage simultané
2) Tirage successif avec remise
3) Tirage successif sans remise.

Exercice ③: Une urne contient 30 boules - n boules rouges et n+1 boules bleus ; et le reste des boules sont vertes ; avec : $1 \leq n \leq 14$

On tire au hasard 3 boules de l'urne successivement et sans remise

1) Calculer le nombre de cas possibles.

2) Calculer le nombre de cas possibles pour que : la $1^{ère}$ boule soit rouge ; et la $2^{ème}$ soit bleu et la $3^{ème}$ soit verte dans cet ordre.

3) Calculer le nombre de cas possibles pour obtenir 3 boules de couleurs deux à deux distinctes

4) Déterminer n sachant que le nombre de cas possibles pour obtenir deux boules rouges et une boule bleu est : 1008.

Exercice ④:

1) Soient p et n deux entiers ; tq : $0 \leq p < n$.

Montrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k C_n^k = (-1)^p C_{n-1}^p.$$

2) Montrer que : $\forall (n;p) \in (\mathbb{N}^*)^2$; tq : $p \leq n$: $\sum_{k=0}^{p} C_n^k C_{n-k}^{p-k} = 2^p C_n^p$.

3) Montrer que : $\forall (n;p) \in \mathbb{N}^2$; tq : $p \leq n$; on ait : $\sum_{k=p}^{n} C_k^p = C_{n+1}^{p+1}$

4) a- Démontrer que : $\forall (p;q;n) \in \mathbb{N}$; tq : $n \leq p+q$

on a : $$\sum_{k=0}^{n} C_p^k \, C_q^{n-k} = C_{p+q}^n$$

b) En déduire la valeur de : $$\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$$

5) Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I. On pose : $f^{(0)} = f$ et $f^{(n)}$ la dérivée d'ordre n de f.

Montrer que : $$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Exercice ⑤ : Un élève de 1ère année du bac possède 14 livres de 4 matières différentes :

5 livres de Maths ; 4 de sciences physiques ; 3 de Français et 2 livres d'Anglais.

Il veut ranger ces livres sur une étagère.

- De combien de façons peut-il le faire :

1) S'il ne tient pas compte des matières ?

2) S'il range d'abord ; les livres d'Anglais ; puis ceux de Sciences physiques ; puis ceux de Maths et enfin ceux de Français ?

3) S'il range les livres par matière ?

Exercice ⑥ : Sur un trajet quotidien ; de son domicile à son travail ; un automobiliste rencontre successivement 7 feux de croisement ; chaque feu peut-être dans la position R (rouge) ; O (orange) ou V (verte). On appelle parcours la suite des 7 feux dans l'état où l'automobiliste les rencontre. Ainsi (R ; O ; V ; V ; V ; O ; O) représente un de ses parcours.

1) Quel est le nombre de parcours possibles ? 3^7

2) Quel est le nombre de parcours pour lesquels les conditions suivantes sont vérifiées :

a) Tous les feux ; sauf le 1er ; sont au rouge.

b) Le 1er des feux est au vert 3^6

c) Tous les feux ; sauf un sont au rouge

d) Au moins un feu est orange

e) L'automobiliste s'arrête au moins 6 fois (s'arrête qd le feu est R ou O)

2^7