EXERCICE 1 (9 PTS)

Calculer les limites suivantes

4.5 $\lim_{x\to -2} \dfrac{2\sqrt{2-x}-\sqrt{x+3}-3}{\sqrt{1-4x}-\sqrt{x+11}}$, $\lim_{x\to 5} \dfrac{\sqrt{x^2-16}-\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-4}-1}$, $\lim_{x\to -\infty} x+\sqrt{x^2-x+2}$

4.5 $\lim_{x\to 1} \dfrac{\left(2-\sqrt{x}\right)\sqrt{x^2+3}-2}{x^2-1}$, $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{xE\left(2x\right)-1}{x^2+2}$, $\lim_{x\to 0} \dfrac{3\cos x-5\cos 2x+2}{\cos x-\cos 3x}$

EXERCICE 2 (3 PTS)

En utilisant la notion de dérivabilité en un point calculer l'un des deux

1.5
1.5 (1) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^4\left(3x^3-4\right)^3+1}{x+1}$ (2) $\lim_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}\cos a-\sqrt{a}\cos x}{x-a}$; $a\in\mathbb{R}^{+*}$

EXERCICE 3 (3 PTS)

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x^2+2}{\left|x^2+x\right|+1}$

1.5 a) Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en $x_0=-1$

1.5 b) Donner une interprétation graphique du résultants

EXERCICE 4 (5 PTS)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{2x^2+(m+1)x-4}{x^2+2x} & : \ x<-2 \\ f(x)=\dfrac{2x+b}{\sqrt{x+6}+1} & : \ x\geq -2 \end{cases} \qquad \text{où} \quad (m,b)\in\mathbb{R}^2$$

1.5 1) Calculer les limites $\lim_{x\to -\infty} f(x)$; $\lim_{x\to +\infty} f(x)$

1.5 2) a) déterminer suivant m la limite $\lim_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} f(x)$

0.5 b) calculer $\lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} f(x)$

1.5 c) Déterminer m et b pour que f admet une limite en -2

Exe 1

Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-\cos 3x}{\sin 2x} & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Étudier la dérivabilité de f en $a = 0$

Exe 2

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x - 2\sin x}{x - \sin 2x} & x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

Montrer que $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{2\sin x}{x} \times \dfrac{\cos x - 1}{x^2} \times \dfrac{x}{1 - 2\dfrac{\sin 2x}{2x}}$

Puis étudier la dérivabilité de f en $a = 0$

Exe 3

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 - |x| - 2}{x - 2|x-1|}$

1) déterminer le domaine de définition de f

2) calculer les limites en $\dfrac{2}{3}$ et au point 2

3) a) étudier la dérivabilité de f en 0

b) étudier la dérivabilité de f au point 1

Exe 4

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = x + \sqrt{|x^2 - x|}$$

1) calculer les limites $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

2) a) étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de 0

b) étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche de 1

Exe 5

Soit f une fonction dérivable en 2 et tell que :

$$f(2) = -2 \ ; \ f'(2) = 1$$

Calculer la limite $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2\sqrt{4x+1} + 3f(x)}{x - 2}$

Exe 6

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = (x^2 + x - 1)^3 + 1 & : x \leq 0 \\ f(x) = a \tan x & : x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

1) montrer que f est dérivable à droite de 0

2) déterminer a pour que f soit dérivable au point 0

Dérivabilité

EXERCICE1

1) étudier la dérivabilité de $f(x)=\dfrac{x+2}{\sqrt{x}+1}$ à droite en $a=0$ et interpréter graphiquement le résultat

2) étudier la dérivabilité de $f(x)=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}+1}$ à gauche en $a=1$ et interpréter graphiquement le résultat

3) étudier la dérivabilité de $f(x)=x+\sqrt{x+2}$ à droite en $a=-2$ et donner une interprétation graphiquement du résultat

4) étudier la dérivabilité de $f(x)=\sqrt{3x-x^2}$ à gauche en $a=3$ et donner une interprétation graphiquement du résultat

EXERCICE2

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x^2-3}{x+2}$

1) déterminer D_f et calculer les limites aux bornes de D_f

2) montrer que f est dérivable sur D_f puis calculer $f'(x)$

3) étudier les variations et dresser le tableau de variations de f

EXERCICE3

Soit f la fonction définie par $f(x)=x\sqrt{x+2}$

1) déterminer D_f et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) étudier la dérivabilité de f à droite de -2 interpréter graphiquement le résultat

3) montrer que f est dérivable sur $]-2,+\infty[$ et $(\forall x\in]-2,+\infty[)\ f'(x)=\dfrac{3x+4}{2\sqrt{x+2}}$

4) donner le tableau de variations de f

EXERCICE4

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x+1}+1}$

1) déterminer D_f et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

2) montrer que f est dérivable sur D_f et déterminer sa fonction dérivée

3) dresser le tableau de variations de f

EXERCICE 5 On pose $f(x)=\dfrac{1}{2x+1}$

1) Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$ et $f'''(x)$

2) on note $f^{(n+1)}$ la fonction dérivée de $f^{(n)}$.

montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ f^{(n)}(x)=\dfrac{(-2)^n\times(1\times\ldots\ldots\times n)}{(2x+1)^{n+1}}$

EXERCICE 1 :

1) Etudier la dérivabilité de la fonction f au point x_0 et donner une interprétation géométrique du résultat obtenu

a) $\boxed{f(x)=x^2-3x \ ,x_0=1}$ b) $\boxed{f(x)=\frac{x^2-1}{x+1} ,x_0=0}$ c) $\boxed{f(x)=\sqrt{4x+1} ,x_0=2}$

d) $\boxed{f(x)=\sin(2x) ,x_0=\pi}$ e) $\boxed{f(x)=x-\sqrt{4x+9} ,x_0=-2}$ f) $\boxed{f(x)=\frac{|x-1|}{x^2} ,x_0=1}$

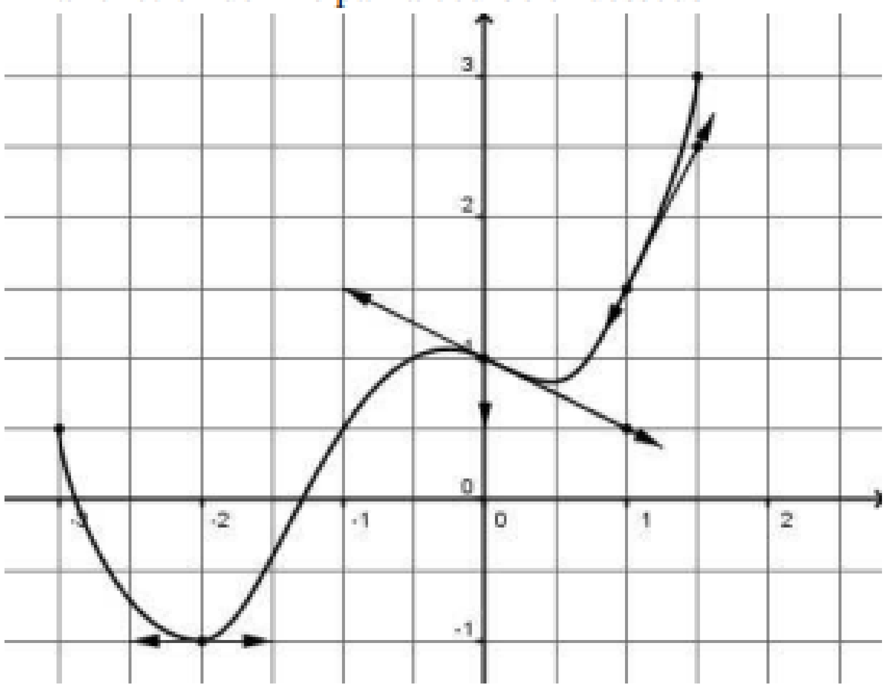
g) $\boxed{f(x)=\cos x-\sin 2x \ ,x_0=0}$ h) $\boxed{f(x)=x-\sqrt{x^2-2x} \ ,x_0=2^+ , 0^-}$

2) Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x^2+3}$

a) Ecrire l'équation de la tangente de la courbe de f au point d'abscisse 1

b) Donner une valeur approchée de $\sqrt{4,44}$

EXERCICE3 : Soit f la fonction définie par la courbe ci-dessous



1- Déterminer graphiquement : $f'(-2)$, $f'(1)$, $f'(0)$

2- la fonction f est elle dérivable à droite de -3 ?

EXERCICE3 :

a) $f(x)=-2x+\sqrt{3}$ b) $f(x)=4x^3-\frac{5}{2}x^2+7x-8$ c) $f(x)=x^2-\frac{3}{x}+4\sqrt{x}-1$

c) $f(x)=(x^2+1)^3$ d) $f(x)=\frac{2x}{x^2+1}$ e) $f(x)=x^2.\sqrt{x}$

i) $f(x)=x-\sqrt{2x+1}$ j) $f(x)=\left(\frac{2x-3}{x+1}\right)^3$ k) $f(x)=x\sqrt{3-x}$

m) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-1}}$ n) $f(x)=4\sin\left(\frac{x}{2}\right)-\cos(2x)$ p) $f(x)=\tan^3 x$

EXERCICE4 : En utilisant les dérivées calculer les limites suivantes

a) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^{2017}-1}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}}\frac{\sin 4x-1}{x-\frac{\pi}{8}}$ c) $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\cos^2 x+\sin(2x)-1}{x-\pi}$

Dérivabilité/ Série n °3

1ère Math / 2021-2022 | Prof MAGHNOUJ

EXERCICE1 : *En utilisant la notion de dérivée, calculer les limites suivantes*

a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{2022}+x-2}{x-1}$ b) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos^2 x+\sin(2x)-1}{x-\pi}$ c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2x-1}{2\cos^2 x-1}$

EXERCICE 2 *Soit f la fonction définie par :* $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2-x+1}{x^2}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f

2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

3. a- Montrer que : $\forall x\in IR^*:\quad f'(x)=\dfrac{(x-1)(x^2+x+2)}{x^3}$

b- Etudier le signe de f'(x) puis dresser le tableau de variation de f

EXERCICE 3 *Soit f la fonction définie par :* $f(x)=x+2\sqrt{1-x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f

2. Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

3. Etudier la dérivabilité de f à gauche de 1 puis interpréter graphiquement le résultat

4 .a- Montrer que : $\forall x\in\,]-\infty,1[\;:\; f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x}\left(1+\sqrt{1-x}\right)}$

b- Etudier le signe de f'(x) puis dresser le tableau de variation de f

5- a- Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse -3

b- Donner une valeur approchée de $f(-2{,}8)$

EXERCICE 4 *Soit f la fonction définie sur IR par :* $\begin{cases} f(x)=x-2\sin\left(\dfrac{x}{2}\right), & x<0\\ f(x)=\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}, & x\geq 0\end{cases}$

1. Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

2. Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter graphiquement les résultats

3. a- Montrer que : $\begin{cases} f'(x)=1-\cos\left(\dfrac{x}{2}\right), & x<0\\ f'(x)=\dfrac{-x+1}{(x+1)^2\sqrt{x}}, & x>0\end{cases}$

b- Etudier le signe de f'(x) puis dresser le tableau de variation de f

EXERCICE 5 *Soit f la fonction définie par :* $f(x)=|x-1|+\sqrt{x^2+3}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f

2. Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$

3. Etudier la dérivabilité de f en 1 puis interpréter graphiquement les résultats

4 .a- Calculer $f'(x)$ *pour tout :* $x\in\,]-\infty,1[\,\cup\,]1,+\infty[$

b- Etudier le signe de f'(x) puis dresser le tableau de variation de f

16/02/2023

Prof : Asma OULBAZ	La dérivation	1.Bac SMF

Exercice ① : Etudier la dérivabilité de f en a ; dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \sqrt{2x+3} - 2$; $a = 3$

2) $f(x) = \dfrac{2x^2+x+1}{x-1}$; $a = -1$

3) $\begin{cases} f(x) = x^2 E\left(\dfrac{2}{x}\right) \\ f(0) = 0 \end{cases}$; $a = 0$

4) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x - 2\sin x}{x - \sin(2x)} \\ f(0) = 1 \end{cases}$; $a = 0$

5) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1-\cos x}{\sin x} \\ f(0) = 0 \end{cases}$; $a = 0$

Exercice ② : Dans chacun des cas suivants ; étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en a :

1) $f(x) = x\,|\sin(2x)|$; $a = 0$

2) $f(x) = \dfrac{|x^2+2x| - 3}{|x| - 1}$; $a = -2$

3) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+2} \ ; x \geq -1 \\ f(x) = x^2 + 2x \ ; x < -1 \end{cases}$; $a = -1$

4) $f(x) = (x-2)E(x)$; $a = 2$

5) $\begin{cases} f(x) = xE\left(\dfrac{1}{x}\right) \ ; x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ $a = 0$

Exercice ③ En utilisant la notion du nombre dérivé ;

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\tan(2x) - \sqrt{3}}{x - \frac{\pi}{6}}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1+x)^{2018} - 1}{x}$

3) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - (x+1)^3 \cos x}{x}$

4) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin(2x).\cos x}{x - \pi}$

5) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1-\sin x} + x^2 + x - 1}{x}$

Exercice ④ : On considère la fonction f définie par :
$f(x) = \dfrac{3x^2 + ax + b}{x^2+1}$.

Déterminer a et b sachant que la droite : $(D) : y = 4x + 3$ est tangente à (C_f) en $A(0;3)$.

Exercice ⑤ : Soit g la fonction numériques définie par : $g(x) = \dfrac{x^2+a}{bx+1}$ tq : $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

Déterminer a et b pour que (C_f) admet au point $B(0;2)$ une tangente parallèle à la droite : $(\Delta) : 2x + y - 1 = 0$.

Exercice ⑥ : Soit f la fonction dérivable en 0 ; telle que :
$f'(0) = a$

Calculer en fonction de a ; les deux limites suivantes :

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(3x) - f(-2x)}{x}$

2) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3f(2x) + 2f(3x) - 5f(0)}{x}$

Exercice ⑦ : Dans chacun des cas suivants ; calculer la dérivée de f ; après avoir déterminer D_f et $D_{f'}$:

1) $f(x) = \dfrac{4x^3}{x^2+1}$ 2) $f(x) = \cos x \cdot \sin x$

3) $f(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{x-1}}$ 4) $f(x) = x^5\sqrt{2x+6}$

5) $f(x) = \left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{x}\right)^4$ 6) $f(x) = \dfrac{\cos x}{6 + \sin x}$

7) $f(x) = \dfrac{5\tan x + 3}{1 - \tan x}$

8) $f(x) = \sqrt{3x-4}\left(\dfrac{2x+1}{x-2}\right)^3$

9) $f(x) = \sin(5x) \times \cos(-6x+1)$

Exercice ⑧ : On considère la fonction f ; définie par :

$$f(x) = x + \sqrt{|x^2 - x|}$$

1) Calculer : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) a- Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 0.

b- Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 1.

Exercice ⑨ : Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^*$. On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{a} E\left(\dfrac{3}{x}\right) & ; \ x > 0 \\ f(0) = 0 & \\ f(x) = \dfrac{2\cos(bx) - 3\cos(x\sqrt{2}) + 1}{x} & ; \ x < 0 \end{cases}$$

1) a- Montrer que :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ ; \left| \dfrac{x}{a} E\left(\dfrac{3}{x}\right) - \dfrac{3}{a} \right| \leqslant \left| \dfrac{x}{a} \right|$

b) En déduire que f est dérivable à droite en 0 ; et $f'_d(0) = \dfrac{3}{a}$.

2) Montrer que f est dérivable à gauche en 0 ; et : $f'_g(0) = 3 - b^2$

3) Déterminer a et b pour que f soit dérivable en 0 ; et la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ en $O(0,0)$ est perpendiculaire à la droite : $(\Delta) : x - y = 0$

Exercice ⑩ : Prouver les deux inégalités suivantes :

1) $\forall x \in \mathbb{R}^+ \ ; \forall n \in \mathbb{N}^* ; (1+x)^n \geqslant 1 + nx$

(Inégalité de Bernoulli).

2) $\forall x \in \left[0 ; \dfrac{\pi}{2}\right[\ ; 2\sin x + \tan x \geqslant 3x$

(Inégalité de Huygens)