LES ENSEMBLES TD0

EXERCICE (1)

Déterminer en extension les ensembles ci-dessous :

1) $A = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \dfrac{2|x|-1}{3} \leq 1 \right\}$

2) $E = \left\{ \dfrac{x}{x+1} > 1 / x \in \mathbb{R} \right\}$

3) $C = \left\{ x \in \mathbb{Z} / \dfrac{x+6}{x+3} \in \mathbb{Z} \right\}$

4) $D = \left\{ x \in \left]-\pi, \pi\right[/ x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{3} \ ; \ k \in \mathbb{Z} \right\}$

5) $E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 / xy - 7x - 5y + 9 = 0 \right\}$

6) $F = \left\{ (x,y) \in \mathbb{Z}^2 / x^2 - y^2 = 4 \right\}$

7) $G = \left\{ (-1)^n - (-1)^m / n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \right\}$

EXERCICE (2)

On pose $A = \left\{ \dfrac{3x+2}{2x+2} / x \in \mathbb{R} \right\}$

Et $B = \left\{ \dfrac{3x+4}{2x-2} / x \in \mathbb{R} \right\}$

montrer que $A = B$

On pose $A = \left\{ \dfrac{x}{x+1} / x \in \mathbb{R}^+ \right\}$

Montrer que $A = [0,1[$

On pose $A = \{ 6k'+1 / k' \in \mathbb{Z} \}$

Et $B = \{ 3k-2 / k \in \mathbb{Z} \}$

Montrer que $A \subseteq B$

On pose $F = \left\{ \pi + \dfrac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z} \right\}$

Et $E = \{ (2k'+1)\pi / k' \in \mathbb{Z} \}$

Montrer que $E \subseteq F$ a-t-on $F \subseteq E$

EXERCICE (3)

On considère les ensembles $E = \left\{ \dfrac{3k+4}{12} / k \in \mathbb{Z} \right\}$ et $F = \left\{ \dfrac{6k+1}{12} / k \in \mathbb{Z} \right\}$

1) vérifiez que $\dfrac{1}{3} \in E$ et $\dfrac{1}{3} \notin F$

2) montrer que $F \subseteq E$ a-t-on $E = F$?

EXERCICE (4)

On pose $E = \left\{ a + b\sqrt{2} / (a,b) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$

1) montrer que $E \neq \varnothing$

2) soit u un élément de E montrer que $u^2 \in E$

3) montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \ u^n \in E$

EXERCICE (5)

Soient a et b deux réels de $\mathbb{R}$. on pose $E = \{ n \in \mathbb{Z} / E(na) = E(nb) \}$

1) supposons que $a < b$ et on pose $\alpha = \dfrac{1}{b-a}$ montrer que $E \subseteq \left]-\alpha, \alpha\right[$

2) en déduire que si $E = \mathbb{Z}$ alors $a = b$

EXERCICE (6)

On considère les ensembles :

$A = \{1,4\}$; $B = \{1,2,a,b\}$ et $E = \{1,2,3,4,a,b,c\}$

1) déterminer X de $P(E)$ tel que $A \cap X = A$

2) déterminer Y de $P(E)$ tel que $A \cup Y = A$

EXERCICE (7)

on pose $A = \left\{ x = \sqrt{n^2+1} - n / n \in \mathbb{N} \right\}$

1) montrer que $A \subset \left]0,1\right]$

2) résoudre dans $\mathbb{N}$ l'équation $\sqrt{n^2+1} - n = \dfrac{1}{2}$ a-t-on $A = \left]0,1\right]$?

EXERCICE (8)

E un ensemble non vide, A ; B et C trois parties de E montrer que :

- $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$
- $(A \cap B = A) \Leftrightarrow (A \subset B)$
- $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$
- $(A \cup B = B) \Leftrightarrow (A \subset B)$
- $(A \cup B = B \cap C) \Leftrightarrow (A \subset B \subset C)$
- $(A \cap \overline{B} = \varnothing) \Leftrightarrow (A \subset B)$

- $(A\cap B)-C=(A-C)\cap(B-C)$
- $A\cap(B\Delta C)=(A\cap B)\Delta(A\cap C)$
- $A\cup(B\Delta C)=(A\cup B)\Delta(A\cup C)$
- $(A\cap B=A)\Leftrightarrow(A\subseteq B)$
- $(A\cup B=B\cap C)\Leftrightarrow(A\subseteq B\subseteq C)$

Exercice 7

A ; B et C des parties de E

Démontrer que :

☺ $A\subset B\subset C\Rightarrow A\cup B=B\cap C$

☺ $\begin{cases}A\cap B=A\cap C\\A\cup B=A\cup C\end{cases}\Rightarrow B=C$

☺ $\begin{cases}A\cap B=B\cup C\\A\cup B=A\cap C\end{cases}\Rightarrow A=B=C$

☺ $\begin{cases}A\cup B=C\\A\cap C=B\end{cases}\Rightarrow A=B=C$

☺ $\begin{cases}A\cap B=A\cap C\\\overline{A}\cap B=\overline{A}\cap C\end{cases}\Rightarrow B=C$

☺ $A-B=A\Leftrightarrow B-A=B$

Exercice 8

E un ensemble non vide et $P(E)$ l'ensemble des parties de E

Prouver que :

- $[(\forall A\in P(E))\,A\cup X=E]\Rightarrow X=E$
- $[(\forall A\in P(E))\,A\cap X=A]\Rightarrow X=E$
- $[(\forall A\in P(E))\,A\cup X=A]\Rightarrow X=\varnothing$
- $[(\forall A\in P(E))\,A\cap X=\varnothing]\Rightarrow X=\varnothing$

Exercice 9

E un ensemble non vide A et B des parties de E. On considère l'équation

$A\cup X=B \quad (\alpha)$ avec $X\in P(E)$

1) Sous quelle condition (α) admet-elle des solutions
2) Déterminer une solution de (α)
3) soit X une solution de (α).

a) montrer que $(B-A)\subset X\subset B$

b) déduire l'ensemble des solutions de (α)

Exercice 1

On pose $A_m=\{x\in\mathbb{R}/\ |x-2|<m\}$ et $m\in\mathbb{R}^*_+$

- déterminer m pour que $A_m\subset\,]1,5[$
- déterminer m pour que $A_m\cap\,]1,5[\,=\varnothing$

Exercice 2

- déterminer en extension $A=\{(x,y)\in\mathbb{Z}^2/\ 2x^2+xy-y^2-5=0\}$
- déterminer en extension $B=\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{4}/\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ $A=\left\{\frac{\pi}{3}+\frac{3k'\pi}{4}/\ k'\in\mathbb{Z}\right\}$

Exercice 3

E un ensemble non vide A ; B et C des parties de E

Montrer que :

- $A\subset B\Rightarrow\overline{B}\subset\overline{A}$
- $A\subset B\Rightarrow A\cap\overline{B}=\varnothing$
- $A\cap(B-C)=(A\cap B)-C$
- $(A-B)-C=(A-B)\cap(A-C)$
- $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-c)$

Exercice 4

On considère $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*/\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}\right\}$

- montrer que pour tout (x,y) de $\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}^*$ on a : $(x,y)\in E\Leftrightarrow(x-5)(y-5)=25$
- déterminer E en extension

Exercice 5

Simplifier

1) $A\cup(A\cap B)$
2) $(A\cup B)\cap(B\cap C)\cap(C\cup A)$
3) $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$
4) $\overline{\left[\overline{(A\cap B)}\cap\overline{(A\cap C)}\right]\cup A}$
5) $\overline{A\cup B}\cap\overline{B\cup\overline{A}}$

Exercice 6

E un ensemble non vide A ; B et C des parties de E. Montrer que :

Exercice 01:(02pts)

➩ On considère dans $\mathbb{R}$ les sous-ensembles suivants :

$$A=\left]-\infty;3\right],B=\left]-2;7\right] \text{ et } C=\left]-5;+\infty\right[.$$

1)- Déterminer $A\setminus B$ et $B\setminus A$, puis en déduire $A\Delta B$.

2)- Déterminer $A\cap C$ et $A\cup C$, puis en déduire $A\Delta C$.

3)- Déterminer $\overline{(A\setminus B)\cap C}$ (le complémentaire de $(A\setminus B)\cap C$ dans $\mathbb{R}$)

Exercice 02:(04pts)

➩ On considère les ensembles suivants :

$$E=\left\{n\in\mathbb{N}\,/\,\frac{14n+91}{2n+1}\in\mathbb{N}\right\} \text{ et } F=\left\{\frac{14n+91}{2n+1}\,/\,n\in\mathbb{N}\right\}$$

1)- a)- Déterminer tous les diviseurs positifs impairs de 84 .

b)- Vérifier que : $(\forall n\in\mathbb{N});\frac{14n+91}{2n+1}=7+\frac{84}{2n+1}$.

c)- En déduire en extension l'ensemble E .

2)- a)- Justifier que : $8\notin F$.

b)- Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N});7<\frac{14n+91}{2n+1}\leq 91$.

c)- Peut-on affirmer que : $F=\left]7;91\right]$? justifier votre réponse .

Exercice 03:

➩ On considère les ensembles suivants :

$$E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,y=x+1\right\} \text{ et } F=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,/\,x^2+y^2-6x+1\geq 0\right\}.$$

✓ Montrer que : $E\subsetneq F$ (c'est à dire que : $E\subset F$ et $F\not\subset E$).

Exercice 04:(06pts)

➩ On considère les ensembles :

$$E=\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\} \text{ et } F=\left\{\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{6}\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\}.$$

1)- Déterminer $E\cap\left[\frac{-\pi}{2};\pi\right]$.

2)- Montrer que : $E\subset F$.

3)- a)- Montrer que $\frac{\pi}{3}\notin E$ (On pourra raisonner par l'absurde) .

b)- L'inclusion $F\subset E$ est-elle satisfaite ? justifier votre réponse .

Exercice 1

1. Décrire en compréhension l'ensemble $\{1,3,5,7,...\}$.
2. Décrire en compréhension l'ensemble $\{1,10,100,1000...\}$.
3. Décrire en extension l'ensemble des nombres rationnels.
4. Décrire en compréhension l'ensemble $]0,1]$.

Exercice 2

Écrire en extension l'ensemble A tel que : $A=\{(x;y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/x^2+xy-2y^2+5=0\}$

Exercice 3

On considère les deux ensembles suivants :

$A=\left\{x\in\mathbb{N}/\dfrac{3x+2}{x-2}\in\mathbb{Z}\right\}$ et $B=\left\{x\in\mathbb{N}/\dfrac{5x+7}{x-1}\in\mathbb{N}\right\}$.

Déterminer en extension les ensembles A et B.

Exercice 4

On considère les ensembles suivants :

$$A=\{x\in\mathbb{Z}/x=2n+1;n\in\mathbb{N}\}$$
$$B=\{x\in\mathbb{Z}/x=501-3m;m\in\mathbb{N}\}$$
$$C=\{x\in\mathbb{Z}/x=501-6p;p\in\mathbb{N}\wedge p\leq 83\}$$

Montrer que $A\cap B=C$.

Exercice 5

On considère les ensembles suivants :

$$A=\{x\in\mathbb{R}/|x-1|\leq 2\}$$
$$B=\left\{x\in\mathbb{R}/\frac{2x}{x+2}\leq 0\right\}$$

Déterminer $A\cap B$, $A\cup B$, $A\setminus B$ et $B\setminus A$.

Exercice 6

Soient A , B et C des parties de l'ensemble E.

1. Montrer que : $A\subset B\Rightarrow A\cup(B\cap C)=(A\cup C)\cap B$.
2. Montrer que : $A\cap\overline{B}=A\cap\overline{C}\Longleftrightarrow A\cap B=A\cap C$.

Exercice 7

Soient a , a' , b et b' des réels tel que : $aa'=4(b+b')$.

On pose : $A=\{x\in\mathbb{R}/x^2+ax+b=0\}$ et $B=\{x\in\mathbb{R}/x^2+a'x+b'=0\}$.

Montrer que : $A\neq\varnothing\vee B\neq\varnothing$.

Exercice 8

Déterminer en extension l'ensemble des parties de l'ensemble $E=\{a;b;1;2\}$

Exercice 9

Soit E un ensemble

A , B et C trois parties de E telles que : $A\cup B=A\cup C$ et $A\cap B=A\cap C$.

Montrer que : $B=C$

Exercice 10

Soit E un ensemble

Pour tout $A,B\in P(E)$, on pose : $A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

Groupe Scolaire Sanaa Casa Oulfa	Séries d'exercices N°02 Semestre 01	1 er Bac Sc Maths Biof 2018/2019

Exercice 1 :

⇨ On considère les deux ensembles :

$$A=\left\{\frac{5+4k}{10}\,/\,k\in\mathbb{Z}\right\} \text{ et } B=\left\{\frac{5+8k'}{20}\,/\,k'\in\mathbb{Z}\right\}.$$

✓ Montrer que : $A\cap B=\varnothing$, (c'es à dire que A et B sont disjoints).

Exercice 2 :

✓ Déterminer en extension les ensembles suivants :

$$E=\left\{x\in\mathbb{Z}\,/\,\frac{2x+1}{x+1}\in\mathbb{Z}\right\},\ F=\left\{y\in\mathbb{Z}\,/\,\frac{y+1}{2y+1}\in\mathbb{Z}\right\}$$

$$\text{Et } G=\left\{x\in\mathbb{Z}\,/\,\frac{x^2-x+2}{2x+1}\in\mathbb{Z}\right\}.$$

Exercice 3 :

⇨ On pose : $A=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,|x-1|\leq 2\right\}$ et $B=\left\{x\in\mathbb{R}-\{-2\}\,/\,\frac{2x}{x+2}\leq 0\right\}$.

✓ Déterminer les ensembles suivants : $A\cup B$, $A\cap B$, $A\setminus B$ et $A\Delta B$.

Exercice 4 :

⇨ Soient a et b deux nombres réels tels que : $a\neq b$.

On pose : $E=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2+2ax+b=0\right\}$ et $F=\left\{x\in\mathbb{R}\,/\,x^2+2bx+a=0\right\}$.

1- Montrer que : $\alpha\in E\cap F\Rightarrow\alpha=\frac{1}{2}$.

2- Montrer que : $E\cap F\neq\varnothing\Rightarrow a+b=\frac{-1}{4}$.

3- Montrer que : $E\cap F=\varnothing\Leftrightarrow a+b\neq\frac{-1}{4}$.

Exercice 5 :

⇨ Soient a et b deux nombres réels tels que : $0<a<b$.

✓ Déterminer : $[a,b]\cap[2-b,3-a]$ suivant les valeurs de a et b .

$A \cap B$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$ et $A \cup (B \cap C)$ et $A \setminus B$ et $(A \cup B) \times (\overline{A} \cup \overline{B})$

Exercice 7 : A et B et C trois parties d'un ensemble E.
Simplifier :
1) $A \cap (\overline{A} \cup B)$; 2) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$
3) $(\overline{A \cup B}) \cap (C \cup \overline{A})$; 4) $A \cap (B \cap (B \cup \overline{C}))$
5) $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A} \cup B)$.

Exercice 8 : A et B deux parties d'un ensemble E.
On considère dans $\mathcal{P}(E)$ l'équation d'inconnue X suivante : (*) $A \cup X = B$
1) a) Déterminer la condition suffisante pour qu'il existe X de $\mathcal{P}(E)$ qui vérifie : (*).
b) Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ l'équation (*).
2) Supposons que : $B \subset A \subset C$
Résoudre dans $\mathcal{P}(E)$ le système suivant : $\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = C. \end{cases}$

Exercice 9 : On considère les deux ensembles suivants :
$$H = \left\{ y \in \mathbb{R} \,/\, y = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \,;\, x \in \mathbb{R} \right\}$$
$$G = \left\{ y \in \mathbb{R} \,/\, y = \frac{1}{1 + \sqrt{x^2+1}} \,;\, x \in \mathbb{R} \right\}$$
1) Montrer que $H =]0 ; 1]$
2) Montrer que : $G \subset H$.
3) Est-ce que $G = H$?

Exercice 10 : On considère les deux ensembles suivants
$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 - xy - 2y^2 = 0\}$
$F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y = 0\}$
1) Montrer que $F \subset E$
2) Déterminer y de $\mathbb{R}$; tq : $(1 ; y) \in E$.
. Est-ce que $E \subset F$?
3) Montrer que : $E = F \cup G$ où G est un ensemble à détermi[ner]

Exercice 11 : Soit m un nombre réel strictement positif :
On considère les deux ensembles suivants :
$E = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, |x - 1| < \frac{3}{2} \right\}$
$F = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, |x + 1| < m \}$
1) Montrer que $E \neq \emptyset$.
2) Déterminer les valeurs de m pour lesquelles ; les deux ensembles E et F soient disjoints

Prof : Asma OULBAZ

Serie N° 2 — Les ensembles

Exercice ① : On considère l'ensemble suivant :

$E = \{n \in \mathbb{N} ; 7 < n < 20\}$

Ecrire en extension les ensembles suivants :

$A = \{n \in E \,/\, n \text{ premier}\}$

$B = \{n \in E \,/\, n \,/\, 187\}$

$C = \{n \in E \,/\, 5 \,/\, n\}$

Exercice ② :

1) Ecrire en extension les ensembles suivants : $A = \{x \in \mathbb{Z} ; |2x-1| < 3\}$

$B = \{x \in \mathbb{N} / x = 4k+3 \text{ et } k \in \mathbb{N} \text{ et } k < 7\}$

$C = \{x \in \mathbb{Q} / (x^2-2)(|x+1|-3) = 0\}$

$D = \{(a;b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} / (a+b)(a+2b) = 6\}$

$E = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / 9 \leq x^2+y^2 \leq 16\}$

$F = \{n \in \mathbb{N} ; \frac{18}{n+1} \in \mathbb{N}\}$

$G = \{x \in \mathbb{N} ; \frac{x^2-2x+6}{x-1} \in \mathbb{Z}\}$

2) Ecrire en compréhension les ensembles suivants :

$A = \{1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; \dots\}$

$B =]-3 ; 5]$

$C = \{(0;1) ; (0;2) ; (0;3) ; (0;4) ; \dots\}$

$D = \{(1;1) ; (2;4) ; (3;9) ; (4;16) ; \dots\}$

Exercice ③ : A et B deux ensembles qui vérifient :

$A \cup B = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11\}$

$A \cap B = \{4 ; 5 ; 6 ; 11\}$

$A \setminus B = \{7 ; 8 ; 9 ; 10\}$

Ecrire A et B en extension

Exercice ④ : p et q deux nombre réels. On considère les deux ensembles A et B tq :

$A = \{x \in \mathbb{R} , x^2 + x + p = 0\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} / x + qx - 3 = 0\}$

Ecrire A et B en extension.

Exercice ⑤ :

1) A et B deux ensembles tq :

$A = \{x \in \mathbb{R} / \frac{3x+3}{3x+2} \in \mathbb{Z}\}$

$B = \{x \in \mathbb{R} / \frac{1}{3x+2} \in \mathbb{Z}\}$

. Montrer que : $A = B$.

2) On considère les deux ensemble E et F ; tq :

$E = \{\frac{19\pi}{10} + \frac{k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z}\}$

$F = \{-\frac{3\pi}{10} - \frac{k\pi}{5} / k \in \mathbb{Z}\}$

Montrer que : $E = F$.

3) On considère l'ensemble G ; t

$G = \{\frac{x+y}{xy} / (x,y) \in (\mathbb{N}^*)^2\}$

a) Montrer que : $G \subset]0;2]$

b) Est-ce que : $]0;2] \subset G$?

Exercice ⑥ : A et B et C trois parties de $\mathbb{R}$, tq :

$A =]-\infty ; -3]$

$B = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 5x < 14\}$

$C = \{x \in \mathbb{R} / \frac{x+3}{x-1} > 0\}$

. Déterminer : $A \cup B$ et $B \cap C$ et

Sana.

Exercice 4 : (les questions sont indépendantes)

1. Montrer que pour tout $(a;b) \in (N^*)^2$: $(4a+3b) \wedge (5a+4b) = a \wedge b$

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   a. $(3n+7) \wedge (2n+5) = 1$ b. $(2n+3) \wedge (7n+9) = 1$ c. $\left(n^2+5n+7\right) \wedge (n+3) = 1$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les nombres suivants :

$$d_1 = \left(2n^2+7n+6\right) \wedge \left(n^2+6n+8\right) \qquad d_2 = \left(2n^3+9n^2+15n+9\right) \wedge \left(2n^2+7n+6\right)$$

$$d_3 = \left(n^2+5n+6\right) \wedge (3n+6) \qquad d_4 = \left(n^3+8\right) \wedge \left(n^2-4\right)$$

Exercice 5 :

Soit a, b et c trois entiers relatifs non nuls.

1.a. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$: $a \wedge b = b \wedge (a+bk)$

b. Montrer que : $a \wedge b = 1 \Rightarrow a \wedge (bc) = a \wedge c$

2.a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $n^2\left(n^2+1\right) \wedge (2n+1) = (2n+1) \wedge 5$

b. Déterminer l'ensemble : $A = \left\{n \in \mathbb{N}^* / n^2\left(n^2+1\right) \wedge (2n+1) = 5\right\}$

Exercice 6 :

Soit x et y deux entiers naturels non nuls tels que : $x < y$

On considère l'ensemble : $S = \{(x;y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* / \, x \wedge y = y - x\}$

1.a. Calculer : $363 \wedge 484$

b. Est-ce que le couple $(363;484)$ appartient à l'ensemble S ? Justifier la réponse

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que : $(n;n+1) \in S$

3.a. Etablir l'équivalence: $(x;y) \in S \Leftrightarrow (\exists k \in \mathbb{N}^*) \begin{cases} x = k(y-x) \\ y = (k+1)(y-x) \end{cases}$

b. En déduire que pour tout $(x;y) \in S$: $x \vee y = k(k+1)(y-x)$

4.a. Déterminer les diviseurs positifs du nombre 228

b. En déduire l'ensemble : $E = \{(x;y) \in S / x \vee y = 228\}$

Exercice 1 :

1.a/ Soit $n \in \mathbb{Z}$ montrer que :

$$2/n\left(n^2-1\right) \qquad et \qquad 3/n\left(n^2-1\right)$$

b/ Soit $(a;b) \in \mathbb{Z}^2$ .Montrer que : $3/ab\left(a^2-b^2\right)$

2. Déterminer toutes les valeurs des entiers relatifs n vérifiant la condition donnée dans chacun des cas suivants:

a. $15/n+7$

b. $n/n+1$

c. $n/n+12$

d. $n-1/n+17$

e. $n+6/3n+4$

f. $5n+7/2n+16$

g. $n-2/n^3+4$

h. $n+3/2n^2+10n+27$

Exercice 2 :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$x = n-1 \qquad et \qquad y = n^2-3n+6$$

1. Soit d un diviseur commun de x et y

Montrer que d divise 4

2. En déduire que : $x \wedge y = x \wedge 4$

3. Déterminer $x \wedge y$ selon les valeurs de n

Exercice 3 :

1. Soit a, b et c trois entiers relatifs non nuls.

Montrer que : $a \wedge b = a \wedge (ca+b)$

2. Application :

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on pose :

$$a = n^2+6n+4 \qquad et \qquad b = n^2+7n+7$$

a. Montrer que : $a \wedge b = a \wedge (n+3)$

b. Montrer que : $a \wedge (n+3) = (n+3) \wedge 5$

c. Déterminer les valeurs de n telles que : $a \wedge b = 1$

Exercice 8 :

Soit a,b et c des éléments de l'ensemble $\mathbb{Z}^*$. Montrer que : $c/ab \Rightarrow c/(a\wedge c).(b\wedge c)$

Exercice 7 :

Soit a et b des entiers naturels tels que : $a\wedge b=1$

1. Montrer que :

a. $(a+b)\wedge a=1$ b. $(a+b)\wedge b=1$ c. $(a+b)\wedge ab=1$

2. Soit n un entier naturel, on pose : $d=(a+b)\wedge\left(a^2+b^2-nab\right)$

Montrer que : d divise le nombre $(n+2)ab$ et en déduire que: $d/n+2$

Exercice 9 : (les questions sont indépendantes)

1. Soit a et b deux entiers naturels non nuls avec $a\geq b$

Soit r le reste de la division euclidienne de a par b

Montrer que : $a>2r$

2. Déterminer la valeur de l'entier a sachant qu'il vérifie à la fois les deux conditions suivantes :

a. Le reste de la division euclidienne de a par 21 est égale à 4 et le quotient est égale à q

b. Le reste de la division euclidienne de a par 17 est égale à 16 et le quotient est égal à q

Exercice 10 :

Soit a,b et c trois entiers relatifs non nuls.

1.a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $n^2\left(n^2+1\right)\wedge(2n+1)=(2n+1)\wedge 5$

b. Montrer que : $a\wedge b=b\wedge(a+bk)$

2.a. Montrer que pour tout $k\in\mathbb{Z}$: $A=\left\{n\in\mathbb{N}^*|n^2\left(n^2+1\right)\wedge(2n+1)=5\right\}$

b. Déterminer l'ensemble : $a\wedge b=1\Rightarrow a\wedge(bc)=a\wedge c$