(2pts) **Exercice 1**

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I deux fois dérivable sur I. Montrer que si $(\forall x \in I)$ $f''(x) \geq 0$ alors (C_f) est convexe sur I

(indication : considérer la fonction g tel que $g(x) = f(x) - (f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $a \in I$)

(18pts) **Exercice 2**

Partie I :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 1 + \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+1}}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

(1pts) 1. Vérifier que $D_f = \mathbb{R}$.

(1,5pts) 2. Montrer que f est paire

(2pts) 3. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et Montrer que (C_f) admet une asymptote oblique ~~branche infinie~~ dirigée vers la droite (Δ) d'équation $(\Delta) : y = x$ au voisinage de $+\infty$

(2pts) 4. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $f'(x) = \frac{x(x^2+3)}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$

(1pts) 5. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

(1pts) 6. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $f(x) - x = \frac{2x(x-1)}{(x+1+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}$

(1.5pts) 7. Déduire la position relative de (C_f) et la droite $(\Delta) : y = x$ sur $\mathbb{R}^+$.

(1.5pts) 8. Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$ $f''(x) = \frac{3(1-x^2)}{\sqrt{(x^2+1)^5}}$

(1.5pts) 9. Déterminer la concavité de C_f et les points d'inflexions de C_f sur $\mathbb{R}^+$.

(2pts) 10. Tracer la courbe de f

Partie II :

Soit (U_n) la suite définie par : $U_0 = \frac{1}{2}$ et $U_{n+1} = f(U_n)$ $(n \in \mathbb{N})$

(1,5pts) 1. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $0 \leq U_n \leq 1$

(1,5pts) 2. Montrer que la suite (U_n) est décroissante

L'étude des fonctions /S1

EXERCICE 1 : Soit f la fonction définie par : $f(x)=\frac{x^2+1}{(x-1)^2}$ et (C_f) sa courbe dans un R-O-N

1. Déterminer l'ensemble de définition de f
2. Calculer $\lim_{x\to 1} f(x)$ et $\lim_{|x|\to+\infty} f(x)$ puis interpréter les résultats graphiquement

3.a) Montrer que : $f'(x)=\frac{-2(x+1)}{(x-1)^3}$ pour tout $x \in \mathbb{R}-\{1\}$

b) Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f.

4. a) Montrer que : $f''(x)=\frac{4(x+2)}{(x-1)^4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}-\{1\}$

b) Etudier la concavité de la courbe (C_f) en précisant son point d'inflexion

5. Donner l'équation de la tangente à la courbe (C_f) au point d'abscisse 0

6. Tracer la droite $(\Delta): y=x-2$ et la courbe (C_f)

EXERCICE 2 : Soit f la fonction définie par: $f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x-1}$, (C_f) sa courbe dans un R-O-N

1. Déterminer l'ensemble de définition de f
2. Calculer les limites: $\lim_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim_{x\to 1^-} f(x)$ puis interpréter les résultats graphiquement
3. a) Calculer les limites: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

b) Montrer que la droite $(\Delta): y=x-2$ est une asymptote de la courbe (C_f)

c) Etudier la position relative de la courbe (C_f) et la droite $(\Delta): y=x-2$

4. Montrer que: $f'(x)=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$ pour tout $x\in\mathbb{R}-\{1\}$ puis dresser le tableau de variations de f.

5. Tracer la droite $(\Delta): y=x-2$ et la courbe (C_f)

EXERCICE 3 : Soit f la fonction définie par: $f(x)=\frac{x^3-3x+2}{x^2}$, (C_f) sa courbe dans un R-O-N

1. Déterminer l'ensemble de définition de f
2. Calculer $\lim_{x\to 0} f(x)$ puis interpréter le résultat graphiquement
3. a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

b) Montrer que la courbe (C_f) admet une asymptote oblique qu'on déterminera

c) Etudier les positions relatives de la courbe (C_f) et son asymptote oblique

4.a) Montrer que : $f'(x)=\frac{x-1}{x} \cdot \frac{x^2+x+4}{x^2}$ pour tout $x\in\mathbb{R}-\{0\}$

b) Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f.

5. a) Vérifier que : $x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)$

b) Déterminer les points d'intersection de la courbe (C_f) avec l'axe des abscisses

6. a) Montrer que : $f''(x)=\frac{-6x+12}{x^4}$ pour tout $x \in \mathbb{R}-\{0\}$

b) Etudier la concavité de la courbe (C_f) en précisant son point d'inflexion

7. Tracer la courbe de la fonction f

L'étude de fonctions /S2 **1sm-fr**

On note : (C) *la courbe représentative de la fonction f*

EXERCICE 1 *: Soit f la fonction définie par* $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x^2+2x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites à ses bornes

2. a)Déterminer les branches infinies de (C)

b) Etudier la position relative de (C) *et la droite* $(\Delta): y=1$

3.a) Montrer que : $\forall x\in IR-\{-2,0\}$, $f'(x)=\dfrac{-2(x+1)}{(x^2+2x)^2}$

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Représenter graphiquement la fonction f

5. Tracer dans le même repère la courbe de la fonction $g(x)=|f(x)|$

EXERCICE 2 *: Soit f la fonction définie par* $f(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{2}{\sqrt{x}-1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites à ses bornes

2.Déterminer les branches infinies de la courbe de f

3. Etudier la dérivabilité de f à droite de 0 et interpréter graphiquement le résultat

4.a)Montrer que : $\forall x>0, x\neq 1$, $f'(x)=\dfrac{(\sqrt{x}-2)(x+1)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

5. Représenter graphiquement la fonction f

6. Tracer dans le même repère la courbe de la fonction $g(x)=f(|x|)$

EXERCICE 3*: Soit f la fonction définie par* $f(x)=x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et étudier sa parité

2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *et montrer que* $(\Delta): y=x+1$ *est asymptote à* (C) *au voisinage de* $+\infty$

3.a)Montrer que : $\forall x\in IR$, $f'(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$.

b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

5. Représenter graphiquement la fonction f

EXERCICE 4*: Soit f la fonction définie sur IR par* $f(x)=\dfrac{3}{2}+\cos 2x-2\cos x$

1. Montrer que 2π *est une période de f*

2. Montrer que f est paire

3. a) Montrer que : $\forall x\in IR$, $f'(x)=2\sin x\,(1-2\cos x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0,\pi]$

6. Représenter graphiquement la fonction f sur $[-3\pi,3\pi]$

Etude de fonctions-S4

EXERCICE 1: Soit $f(x)=x-1+\frac{2}{\sqrt{x}}$, (C) la courbe de f dans un repère orthonormé

1. Déterminer l'ensemble de définition de f
2. a) Calculer $\lim_{x\to0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat
   b) calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis que $(\Delta):y=x-1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$
   c) Déterminer la position relative de la courbe (C) et la droite $(\Delta):y=x-1$
3. a) Montrer que : $f'(x)=\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x\sqrt{x}(x\sqrt{x}+1)}$
   b) Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f
4. Tracer la courbe (C)

EXERCICE2 : Soit $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}-1}$, (C) la courbe de f dans un repère orthonormé

1. Déterminer l'ensemble de définition de f
2. a) Calculer $\lim_{x\to1^+} f(x)$, $\lim_{x\to1^-} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
   b) Déterminer les branches infinies de (C)
3. a) Etudier la dérivabilité de f à droite de 0 et interpréter le résultat
   b) Montrer que: $f'(x)=\frac{\sqrt{x}-2}{2(\sqrt{x}-1)^2}$
   c) Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f
4. Montrer que la courbe a un unique point d'inflexion
5. Tracer la courbe (C)
6. Soit g la fonction définie par Soit $g(x)=\frac{x}{\sqrt{|x|}-1}$
   a) Montrer que l'ensemble de définition de g est $D_g=\mathbb{R}-\{-1,1\}$
   b) Etudier la parité de g
   c) Vérifier que $g(x)=f(x)$ pour tout $x\in[0,+\infty[-\{1\}$
   d) Tracer dans le même repère la courbe de la fonction g

EXERCICE3 : Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $f(x)=x-2\sqrt{x}$,
(C) la courbe de f dans un repère orthonormé

1. a) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$
   b) Montrer que la courbe admet une branche parabolique de direction $(\Delta):y=x$
   c) Etudier la position relative de la courbe (C) et la droite $(\Delta):y=x$
2. Etudier la dérivabilité de f à droite de 0 et interpréter géométriquement le résultat
3. Montrer que : $\forall x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=\frac{x-1}{(\sqrt{x}+1)\sqrt{x}}$ puis dresser le tableau de variations
4. Déterminer les points d'intersection de la courbe et l'axe des abscisses
5. Tracer la courbe (C)

Classe : 1ere S- Maths	SERIE D' EXERCICES /5 *Etude de fonctions*	Prof Maghnouj

Exercice 1 Soit: $f(x)=\dfrac{3\cos^2 x}{2\cos x-1}$ et on désigne par C_f sa courbe représentative dans un R.O

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
2. a) Montrer que le domaine d'étude de f se réduit à $D_E=\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right[\cup\left]\dfrac{\pi}{3},\pi\right]$
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}^-} f(x)$, interpréter les résultats graphiquement
3. a) Montrer que pour tout x de D_E on a : $f'(x)=\dfrac{3\sin 2x(1-\cos x)}{(2\cos x-1)^2}$
   b) Etudier le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variations de f sur D_E
4. Résoudre dans D_E l'équation $f(x)=0$
5. Tracer la courbe C_f sur l'intervalle $[-2\pi,2\pi]\cap D_E$

Exercice 2 Soit f la fonction définie par : $f(x)=x-2\sqrt{x+1}$,

1. Déterminer l'ensemble de définition de f
2. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
   b) Montrer que la courbe admet une branche parabolique de direction $(\Delta):y=x$
   c) Etudier la position relative de la courbe C_f et la droite $(\Delta):y=x$
2. Etudier la dérivabilité de f à droite de -1 et interpréter géométriquement le résultat
3. Montrer que : $\forall x>-1,\ f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$ puis dresser le tableau de variations
4. Déterminer les points d'intersection de la courbe C_f et l'axe des abscisses
5. Tracer la courbe C_f

Exercice 3 Soit $f(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{|x^2-1|}{x}$, C_f sa courbe représentative dans un repère O.N

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de f puis étudier sa parité
   b) Calculer $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$, interpréter le résultat graphiquement
   c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis déterminer la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$
2. Etudier la dérivabilité de f en 1, interpréter les résultats graphiquement
3. Montrer que: $\begin{cases} f'(x)=-\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{x^2}\right), x>1 \\ f'(x)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{x^2}, 0<x<1 \end{cases}$ puis dresser le tableau de variations de f sur $]0,+\infty[$
4. Tracer la courbe C_f
5. Déterminer graphiquement et suivant les valeurs de m le nombre de solution de l'équation : $(E_m): x^2-2|x^2-1|-2mx=0$

LYCÉE LA PRINCESSE LALLA NEZHA	Série d'exercices Etudes de fonction	1SM

Exercice 1 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par: $f(x)=\frac{-x^2+2x+1}{x+1}$ et soit $(\mathcal{C}_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer $\lim_{x\to -1^+} f(x)$ et $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.
2) a) Déterminer les réels a,b et c tels que pour tout $x\in\mathbb{R}-\{-1\}: f(x)=ax+b+\frac{c}{x+1}$.
   b) En déduire que la droite $(\Delta): y=ax+b$ est une asymptote oblique de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ puis déterminer la position relative de $(\mathcal{C}_f)$ et (Δ).
3) Étudier les variations de la fonction f.
4) Soit I le point d'intersection des deux asymptotes de la courbe (C_f). Montrer que I est un centre de symétrie de $(\mathcal{C}_f)$.
5) Déterminer les points d'intersection de la courbe (C_f) avec les axes du repère.
6) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 0 .
7) Construire (T) et $(\mathcal{C}_f)$.

Exercice 2: Le plan est rapporté au repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\frac{x^2+3x+6}{x+1}$

1) Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f et calculer les limites de f aux bornes des intervalles de D_f.
2) a. Montrer que: $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}); f'(x)=\frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$
   b. Dresser le tableau de variations de f.
3) a. Vérifier que : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\}); f(x)=x+2+\frac{4}{x+1}$
   b. Déterminer les branches infinies de la courbe de f.
   c. Déterminer la position relative de la courbe de f par rapport à la droite (D) d'équation : $y=x+2$.
4) Montrer que le point $I(-1;1)$ est un centre de symétrie de la courbe de f.
5) a. Déterminer le point d'intersection de la courbe de f avec l'axe des ordonnées.
   b. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 .
6) Tracer la courbe de f.
7) a. Déterminer graphiquement le nombre et le signe des solutions de l'équation $(E_m): x^2+(3-m)x+6-m=0$
   Discuter suivant les valeurs du paramètre m.
   b. Vérifier algébriquement les résultats de la question a).**Exercice 3:**

LYCÉE LA PRINCESSE LALLA NEZHA	Série d'exercices Etudes de fonction	1SM

Exercice 3:

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+5$

1) Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f, et calculer les limites de f aux bornes de D.
2) Calculer $f'(x)$ pour tout x de D, et dresser le tableau de variations de f.
3) Étudier la concavité de (C_f) et déterminer ces points d'inflexion.
4) Étudier les branches infinies de la courbe de f.
5) Déterminer le point d'intersection de (C_f) avec l'axe des ordonnées puis déterminer l'équation de la tangente à (C_f) en ce point.
6) Tracer la courbe de f.

Exercice 4 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x)=\sin x\cos x-\sin x$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé $(0,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que f est périodique de période 2π.
2) Montrer que le point $O(0,0)$ est un centre de symétrie de (C_f).
3) a. Calculer $f'(x)$. pour tout réel x.
   b. Factoriser $f'(x)$, puis étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0,\pi]$.
   c. Dresser le tableau de variations de f sur $[0,\pi]$. .
   d. Tracer (C_f) sur l'intervalle $[0,\pi]$, puis déduire la courbe de f sur l'intervalle $[-\pi;\pi]$

Exercice 5 :

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}-\{-1\}$ par : $f(x)=x-1+\frac{3x+4}{(x+1)^2}$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Calculer les limites de f aux les bornes des intervalles de D_f.
2) a. Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}-\{-1\});f'(x)=\frac{(x+1)(x-1)(x+2)^2}{(x+1)^4}$
   b. Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.
3) a. Étudier les branches infinies de la courbe (C_f).
   b. Déterminer la position de (C_f) par rapport à son asymptote oblique.
4) a. Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse -2.
   b. Montrer que la courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse α, et que : $-2<\alpha<-1$.
   c. Tracer (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$

5) Discuter graphiquement, selon les valeurs du paramètre m, le nombre de solutions de l'équation : $(E): x^3+(1-m)x^2+2(1-m)x+3-m=0$

Exercice 6 :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par: $f(x)=x+1-\sqrt{x^2-x-2}$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a. Déterminer D l'ensemble de définition de la fonction f.

   b. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, puis montrer que : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\frac{3}{2}$

2) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite au point 2 et à gauche au point -1 , et donner une interprétation graphique des résultats.

3) a. Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty,-1[$ et $]2;+\infty[$ puis calculer $f'(x)$ pour tout x de l'ensemble $D-\{-1;2\}$,

   b. Montrer que : $f'(x)>0$ pour tout x de l'intervalle $]-\infty;-1[$, et que $f'(x)<0$ pour tout x de l'intervalle $]2;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de f.

4) a. Montrer que la droite d'équation $y=2x+\frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

   b. Tracer la courbe (C) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 7 :

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par: $f(x)=\sqrt{2x-2}-x+1$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ puis : $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.
3) Déterminer la branche infinie de la courbe de f au voisinage de $+\infty$.
4) Étudier la dérivabilité de la fonction f à droite en $x_0=1$, puis donner une interprétation graphique du résultat obtenu.
5) a. Montrer que : $(\forall x\in]1;+\infty[); f'(x)=\frac{3-2x}{\sqrt{2x-2}\left(\sqrt{2x-2}+1\right)}$

   b. Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations de f.
6) Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse $x_0=3$
7) Montrer que : $\forall x\in]1;+\infty[$; $f''(x)=\frac{-1}{\left(\sqrt{2x-2}\right)^3}$, puis étudie la concavité de (C_f) sur $[1;+\infty[$
8) Tracer (C_f) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.