Exercice (1)

Soient f *et* g deux fonctions définies par : $f(x) = x^2 - x$ et $g(x) = \dfrac{2x-2}{x+1}$

Partie (1)

1.5 pt — 1) a) dresser le tableau de variation de f *et* g

1.5 pts — b) qu'elle est la nature de chacune des courbes (C_f) *et* (C_g') et leurs éléments caractéristiques

1 pt — 2) a) prouver que $(\forall x \in \mathbb{R} - \{-1\})\quad f(x) = g(x) \iff (x+2)(x-1)^2 = 0$

1 pt — b) déduire les points d'intersections des courbes (C_f) *et* (C_g')

0.5 pt — 3) a) déterminer les points d'intersections de la courbe (C_f) et l'axe des abscisses

2 pts — b) tracer dans un même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les deux courbes (C_f) *et* (C_g')

1 pt — 4) résoudre graphiquement l'inéquation $x^2 - x - 1 \geq \dfrac{x-3}{x+1}$

Partie (2)

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que : $\begin{cases} F \text{ est paire} \\ F(x) = g(x) & ; \quad x \leq -2 \\ F(x) = f(x) & ; \; -2 < x \leq 0 \end{cases}$

2 pts — 1) calculer $F(5)$ et $F\left(\dfrac{3}{2}\right)$

1.5 pts — 2) donner le tableau de variation de F sur $\mathbb{R}$

1 pt — 3) donner une expression de $F(x)$ pour tout x de l'intervalle $[0,2[$

1.5 pts — 4) tracer dans un autre repère $(O', \vec{i}, \vec{j})$ la courbe de la fonction F

Exercice (2)

1) soit f un fonction périodique de période T

0.75 pt — a) montrer par récurrence que $(\forall k \in \mathbb{N})\quad f(x+kT) = f(x)$

0.75 pt — b) en déduire que $(\forall k \in \mathbb{Z})\quad f(x+kT) = f(x)$

2) soient c un réel et f une fonction périodique de période T telle que :

$$(\forall x \in [0,T[)\quad f(x) = c$$

0.5 pt — a) soit x un réel et on pose $k = E\left(\dfrac{x}{T}\right)$. encadrer $x - kT$

0.5 pt — b) en déduire que $f(x) = c$

3) soit n un entier non nul .

on considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) - E(x)$

1 pt — a) montrer que $T = 1$ est une période de F

2 pts — b) donner l'expression de $F(x)$ pour tout x de $[0,1[$ puis conclure

Lycée qualifiant IBN SINA
Année Scolaire : 2022/2023

Classe : 1bac SM
Pr : M.AFKIR

DS2 S1 2h Libre 1

(13 pts) **Exercice 2**

Soient f et g deux fonctions définie par : $g(x) = \sqrt{x+1}$ et $f(x) = \frac{x-m}{x}$ avec $(m \in \mathbb{R}*)$.

Partie(1)

(1pts) 1. Dresser le tableau de variation de la fonction g

(1pts) 2. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^*$ avec $x \notin y$ .Monter que le taux de variation de f entre x et y est : $T = \frac{m}{xy}$

(2pts) 3. Discuter suivant les valeurs de m la monotonie de f, puis dresser dans chaque cas le tableau de variation de f.

4. Soit h la fonction définie par $h(x) = f \circ g(x)$ pour tout $x \in D_h$

(1pts) (a) Montrer que l'ensemble de définition de h est : $D_h =]-1; +\infty[$

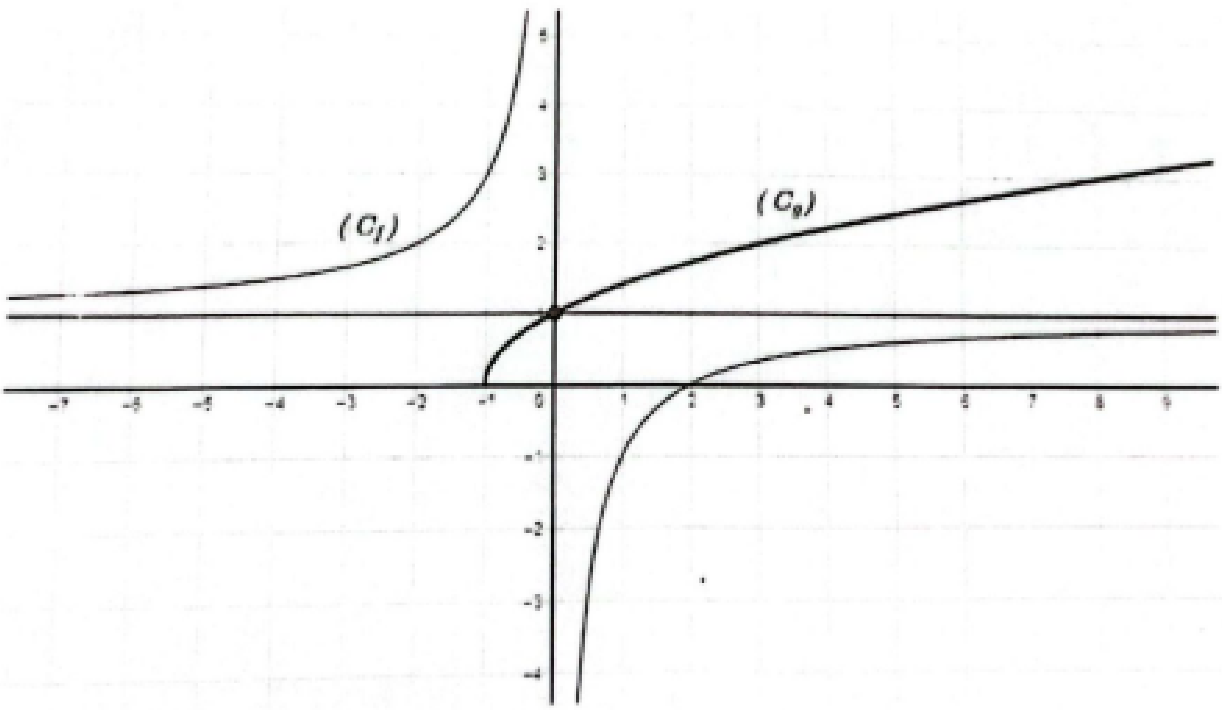
(1pts) (b) Donner l'expression de $h(x)$ pour tout $x \in]-1; +\infty[$

(1pts) (c) Montrer que $g(]-1; +\infty[) =]0; +\infty[$

(2pts) (d) Montrer que si $m < 0$ alors h est strictement décroissante sur $]-1; +\infty[$ et si $m > 0$ alors h strictement croissante sur $]-1; +\infty[$

Partie(2) On suppose dans cette partie que $m = 2$

(C_f) et $C_g)$ les deux courbes de f et h représentés dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.



(pts) 1. Résoudre graphiquement les équations : [1] $f(x) = g(x)$; [2] $f(x) = 0$

Exercices corrigés
Généralités sur les fonctions

Exercice 1 : Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes définie par

1) $f(x)=3x^2-x+1$. 2) $f(x)=\frac{x^3}{2x-4}$.

3) $f(x)=\frac{2x^4}{x^2-4}$. 4) $f(x)=\frac{7x-1}{x^3-2x}$.

5) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$. 6) $f(x)=\frac{x-5}{2x^2-5x-3}$.

7) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$. 8) $f(x)=\sqrt{\frac{-3x+9}{x+1}}$.

9) $f(x)=\frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$. 10) $f(x)=\frac{|x-5|}{x^2+1}$.

11) $f(x)=\frac{\sqrt{|x|}}{x}$. 12) $f(x)=\frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$.

13) $f(x)=3x^2-\frac{1}{x}+\sqrt{-x}$.

14) $f(x)=\frac{x}{|2x-4|-|x-1|}$. 15) $f(x)=\frac{2\sin x}{2\cos x-1}$.

16) $f(x)=\sqrt{\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$.

17) $f(x)=\sqrt{x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}}$

18) $f(x)=\frac{|x-4|-|x-1|}{x^2+2|x|-3}$

19) $f(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{3-5x}$.

Solutions

1) $f(x)=3x^2-x+1$

f Est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image. Donc $D_f=\mathbb{R}$

2) $f(x)=\frac{x^3}{2x-4}$.

Pour les fonctions du type fractions rationnelles, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels le dénominateur est non nul.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x-4\neq0\}$

$2x-4=0$ ssi $x=\frac{4}{2}=2$ Donc $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

On dira aussi que 2est une valeur interdite pour la fonction f

3) $f(x)=\frac{2x^4}{x^2-4}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2-4\neq0\}$

$x^2-4=0$ ssi $x^2-2^2=0$ ssi $(x-2)(x+2)=0$

ssi $x-2=0$ ou $x+2=0$ ssi $x=2$ ou $x=-2$

donc $D_f=\mathbb{R}-\{-2;2\}$

4) $f(x)=\frac{7x-1}{x^3-2x}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^3-2x\neq0\}$

$x^3-2x=0$ ssi $x(x^2-2)=0$ ssi $x=0$ ou

$x^2-2=0$ ssi $x=0$ ou $x^2=2$

ssi $x=0$ ou $x=\sqrt{2}$ ou $x=-\sqrt{2}$

donc $D_f=\mathbb{R}-\{-\sqrt{2};0;\sqrt{2}\}$

5) $f(x)=\sqrt{-3x+6}$.

Pour les fonctions du type racine carrée, l'ensemble de définition est l'ensemble des nombres pour lesquels l'intérieur de la racine est positif

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/-3x+6\geq0\}$

$-3x+6\geq0$ ssi $-3x\geq-6$ ssi $x\leq\frac{-6}{-3}$ ssi $x\leq2$

Donc $D_f=]-\infty;2]$

6) $f(x)=\frac{x-5}{2x^2-5x-3}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-5x-3\neq0\}$

$2x^2-5x-3=0$ $a=2$ et $b=-5$ et $c=-3$

$\Delta=b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times(-3)=25+24=49=(7)^2>0$

$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

$x_1=\frac{-(-5)+\sqrt{49}}{2\times2}=\frac{7+5}{4}=\frac{12}{4}=3$ et

$x_2=\frac{(-5)-\sqrt{49}}{2\times2}=\frac{5-7}{4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{1}{2};3\right\}$

7) $f(x)=\sqrt{2x^2-3x+1}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2-3x+1\geq0\}$ soit Δ son discriminant

$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4\times 2\times 1 = 9-8 = 1 > 0$

$x_1 = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times 2} = \frac{4}{4} = 1$ et $x_2 = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$		$1/2$		1		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $D_f = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty[$

8) $f(x) = \sqrt{\frac{-9x+3}{x+1}}$.

$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} / \frac{-9x+3}{x+1} \geq 0 et x+1 \neq 0 \right\}$

$-9x+3=0$ ssi $-9x=-3$ ssi $x=\frac{1}{3}$

$x+1=0$ ssi $x=-1$

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-9x+3$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-9x+3}{x+1}$		$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

Donc $D_f = \left]-1, \frac{1}{3}\right]$

9) $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{-2x^2+x+3}}$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -2x^2+x+3 > 0\}$

$-2x^2+x+3=0$ $a=-2$ et $b=1$ et $c=3$

$\Delta = b^2-4ac = (1)^2 - 4\times(-2)\times 3 = 1+24 = 25 = (5)^2 > 0$

Donc on a deux racines

$x_1 = \frac{-1+5}{2\times(-2)} = \frac{4}{-4} = -1$ et $x_2 = \frac{-1-5}{2\times(-2)} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$

x	$-\infty$		-1		$3/2$		$+\infty$
$-2x^2+x+3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $D_f = \left[-1, \frac{3}{2}\right]$

10) $f(x) = \frac{|x-5|}{x^2+1}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2+1 \neq 0\}$

$x^2+1=0$ ssi $x^2=-1$

Cette équation n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$

Donc $D_f = \mathbb{R}$

11) $f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{x}$.

$f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $\sqrt{|x|} \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$

Or on sait que $|x| \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc $f(x) \in \mathbb{R}$ ssi $x \neq 0$

Donc $D_f = \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$

12) $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x+2 \geq 0 et x-1 \neq 0\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -2 et x \neq 1\}$

$D_f = [-2, 1[\cup]1, +\infty[$

13) $f(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} + \sqrt{-x}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / -x \geq 0 et x \neq 0\}$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0 et x \neq 0\}$

$D_f =]-\infty, 0[$

14) $f(x) = \frac{x}{|2x-4| - |x-1|}$.

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / |2x-4| - |x-1| \neq 0\}$

$|2x-4| - |x-1| = 0$ ssi $|2x-4| = |x-1|$

ssi $2x-4 = x-1$ ou $2x-4 = -(x-1)$

ssi $2x-x = 4-1$ ou $2x-4 = -x+1$

ssi $x=3$ ou $2x+x = 4+1$

ssi $x=3$ ou $3x=5$ ssi $x=3$ ou $x=\frac{5}{3}$

Donc : $D_f = \mathbb{R} - \left\{\frac{5}{3}; 3\right\}$

15) $f(x) = \frac{2\sin x}{2\cos x - 1}$. $D_f = \{x \in \mathbb{R} / 2\cos x - 1 \neq 0\}$

$2\cos x - 1 = 0$ ssi $\cos x = \frac{1}{2}$

$\cos x = \frac{1}{2}$ ssi $\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$

Donc: $D_f = \mathbb{R} - \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

16) $f(x) = \sqrt{\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}}$

$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6} \geq 0 et x^2-x-6 \neq 0\right\}$

- On détermine les racines du trinôme $-2x^2+2x+13$:

Le discriminant est Δ' = 2² – 4 x (-2) x 13 = 108 et ses racines sont :

$x_1=\frac{-2-\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$ et $x_2=\frac{-2+\sqrt{108}}{2\times(-2)}=\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$

- On détermine les racines du trinôme x^2-x-6 :
Le discriminant est Δ = (-1) ² – 4 x (-6) x 1 =25 et ses racines sont :

$x_1'=\frac{-(-1)-\sqrt{25}}{2\times 1}=\frac{1-5}{2}=-2$ et

$x_2'=\frac{-(-1)+\sqrt{25}}{2\times 1}=\frac{1+5}{2}=3$

- On obtient le tableau de signe :

x	$-\infty$		$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$		-2		3		$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$-2x^2+2x+13$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
x^2-x-6		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

$D_f=\left[\frac{1-3\sqrt{3}}{2};-2\right[\cup\left]3;\frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right]$.

17) $f(x)=\sqrt{x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}\geq 0\right\}$

$\Delta=b^2-4ac=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-4\times 1\times 2\sqrt{6}$

$\Delta=12-4\sqrt{6}+2+8\sqrt{6}=14+4\sqrt{6}$

$14+4\sqrt{6}=14+2\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{2}=\left(2\sqrt{3}\right)^2+2\times 2\sqrt{3}\times\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2$

$14+4\sqrt{6}=\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2$

On a $\Delta=14+4\sqrt{6}>0$ donc

$x_1=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{14+4\sqrt{6}}}{2\times 1}=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times 1}$

et $x_2=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-\left|2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right|}{2\times 1}$

$x_1=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}+2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2\times 1}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$ et

$x_2=\frac{-2\sqrt{3}+\sqrt{2}-2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2\times 1}=\frac{-4\sqrt{3}}{2}=-2\sqrt{3}$

x	$-\infty$		$-2\sqrt{3}$		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$x^2+\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)x-2\sqrt{6}$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc : $D_f=\left]-\infty;-2\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right[$

18) $f(x)=\frac{|x-4|-|x-1|}{x^2+2|x|-3}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x^2+2|x|-3\neq 0\right\}$

$x^2+2|x|-3=0\Leftrightarrow|x|^2+2|x|-3=0$ on pose $|x|=X$

donc l'équation devient :

$X^2+2X-3=0$

Le discriminant est Δ = 2² – 4 x 1 x (-3)= 16 et ses solutions sont :

$X_1=\frac{-2-\sqrt{16}}{2\times 1}=-3$ et $X_2=\frac{-2+\sqrt{16}}{2\times 1}=1$

Donc on a : $|x|=-3$ et $|x|=1$

$|x|=-3$ n'a pas de solution

$|x|=1\Leftrightarrow x=1$ ou $x=-1$ donc $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

19) $f(x)=\sqrt{2x-1}+\sqrt{3-5x}$.

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/2x-1\geq 0 et 3-5x\geq 0\right\}$

$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/x\geq\frac{1}{2} et x\leq\frac{3}{5}\right\}$

Donc $D_f=\left[\frac{1}{2},\frac{3}{5}\right]$

Exercice 2 : Etudier la parité des fonctions suivantes définie par : 1) $f(x)=3x^2-5$. 2) $f(x)=\frac{3}{x}$

3) $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$. 2) $f(x)=x^2+\frac{1}{x}$.

3) $f(x)=\frac{|x|}{x^2-1}$. 4) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

5) $f(x)=\frac{2x^3}{x^2+5}$. 6) $f(x)=|x|-\sqrt{2x^2+4}$.

7) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{2}$. 8) $f(x)=\frac{x}{x-2}$

Solutions :

1) Soit f une fonction tq : $f(x)=3x^2-5$

Donc $D_f=\mathbb{R}$ car f est une fonction polynôme

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=3(-x)^2-5=3x^2-5$
  $f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire,

2) $f(x)=\frac{3}{x}$

on a $g(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$

donc $D_f=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$

- $f(-x)=\dfrac{3}{-x}=-\dfrac{3}{x}$

$f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

3) $f(x)=2x^3+x^2$

h est une fonction polynôme donc Un réel a toujours une image. Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=2(-x)^3+(-x)^2=-2x^3+x^2$

$f(-x)=-(2x^3-x^2)\neq -f(x)$

Donc f est une fonction ni paire ni impaire,

3) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x}$

on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$ donc $D_f=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=\dfrac{(-x)^2-1}{-x}=-\dfrac{x^2-1}{x}$

$f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire,

4) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x\neq 0$

donc $D_f=\mathbb{R}^*$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}^*$, alors $-x\in\mathbb{R}^*$
- $f(-x)=(-x)^2+\dfrac{1}{-x}=x^2-\dfrac{1}{x}=\left(-x^2+\dfrac{1}{x}\right)$

$f(-x)\neq -f(x)$

Donc f est une fonction ni paire ni impaire,

5) $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2-1}$ on a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x^2-1\neq 0$

$x^2-1=0$ ssi $x^2=1$ ssi $x=1$ ou $x=-1$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{-1;1\}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$, alors $-x\in\mathbb{R}-\{-1;1\}$
- $f(-x)=\dfrac{|-x|}{(-x)^2-1}=\dfrac{|x|}{x^2-1}$

$f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

6) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/1-x^2\geq 0\}$

$1-x^2=0$ ssi $x^2=1$ ssi $x=1$ ou $x=-1$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$1-x^2$	$-$	0	$+$	0	$-$

Donc $D_f=[-1,1]$

- Pour tout réel x, si $x\in[-1,1]$, alors $-x\in[-1,1]$
- $f(-x)=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2}$

$f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

7) $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^2+5}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/x^2+5\neq 0\}$

$x^2+5=0$ ssi $x^2=-5$ pas de solutions

Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=\dfrac{2(-x)^3}{(-x)^2+5}=\dfrac{-2x^3}{x^2+5}$

$f(-x)=-f(x)$

Donc f est une fonction impaire

8) $f(x)=|x|-\sqrt{2x^2+4}$.

$D_f=\{x\in\mathbb{R}/2x^2+4\geq 0\}$

Or on sait que $2x^2\geq 0$ Pour tout réel x, donc $2x^2+4\geq 0+4$ donc $2x^2+4\geq 4\geq 0$

Donc $D_f=\mathbb{R}$

- Pour tout réel x, si $x\in\mathbb{R}$, alors $-x\in\mathbb{R}$
- $f(-x)=|-x|-\sqrt{2(-x)^2+4}=|x|-\sqrt{2x^2+4}$

$f(-x)=f(x)$

Donc f est une fonction paire

9) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{2}$. $D_f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq 0\}$ Donc $D_f=\mathbb{R}^+=[0;+\infty[$

On a $2\in\mathbb{R}^+$ mais $-2\notin\mathbb{R}^+$ Donc f est une fonction ni paire ni impaire

8) $f(x)=\dfrac{x}{x-2}$

On a $f(x)\in\mathbb{R}$ ssi $x-2\neq 0$ ssi $x\neq 2$

Donc $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$

On a $-2\in D_f$ mais $-(-2)=2\notin D_f$

Donc D_f n'est pas symétrique par rapport a O

Donc f est une fonction ni paire ni impaire

Exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{x^3}{x^2-x+1}$

1) déterminer D_f puis calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) étudier les branches infinies de la courbe (C)

3) a) montrer que $(\forall x\in D_f)$ $f'(x)=\frac{x^2(x^2-2x+3)}{(x^2-x+1)^2}$

b) montrer que f est strictement croissante puis dresser le tableau de variations de f

4) a) vérifier que $(\forall x\in D_f)$ $f(x)=x+1-\frac{1}{x^2-x+1}$

b) étudier la position de (C) par rapport à la droite (Δ) $y=x+1$

5) a) montrer que $(\forall x\in D_f)$ $f''(x)=\frac{-6x(x-1)}{(x^2-x+1)^3}$

b) étudier la concavité de la courbe (C) en précisant les coordonnées des points d'inflexions

6) tracer la courbe (C) dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

7) on considère la fonction g telle que $g(x)=\frac{x^3}{x^2-|x|+1}$

a) étudier la parité de la fonction g

b) tracer dans un repère $(O',\vec{u},\vec{v})$ la courbe de la fonction g (justifier votre réponse)

c) déduire de la courbe les équations des droites asymptotes

Exercice 2

On pose $A(x)=\sqrt{3}\left(4\cos^4 x+\sin^2 2x\right)-2\sin 2x$

1) montrer que $4\cos^4 x=4\cos^2 x-\sin^2 2x$

2) en déduire que $A(x)=4\cos x\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x\right)$

3) résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $A(x)=0$

4) montrer que $\left(\forall x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)$ $A(x)=4\cos^2 x\left(\sqrt{3}-\tan x\right)$

5) résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ l'inéquation $4\cos^4 x+\sin^2 2x\geq\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin 2x$

Exercice 1

Soit g la fonction définie par : $g(x)=x^2-\frac{2}{x}+1$

1) montrer que g est croissante sur $\left]1,+\infty\right[$
2) on considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+x-2}}$$

a) montrer que $D_f=\left]1,+\infty\right[$

b) vérifier que $(\forall x\in D_f)\quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{g(x)}}$

c) en déduire le sens de variation de f

Exercice 2

on considère la fonction f définie par :

$$f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x}$$

1) Montrer que f minorée
2) a) montrer que f est majorée par $\frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2}$ est-elle une valeur maximale de f ?

3) on pose $h(x)=\sqrt{x-1}$ et $g(x)=\frac{x}{x^2+1}$

a) montrer que $T_g=\frac{1-xy}{(1+x^2)(1+y^2)}$

b) étudier les variations de g sur $[0,1]$ et sur $\left[1,+\infty\right[$

c) soient a et b deux réels de $\mathbb{R}^{*+}$ tels que :

$a+b\geq 2$. montrer que $a+b+\frac{1}{a+b}\geq\frac{5}{2}$

d) vérifier que $f=g\circ h$ puis étudier les variations de f sur D_f

Exercice 3

soient a , b et c des réels de $\mathbb{R}^+$

on considère la fonction f définie par :

$f(x)=x^2-(b+c)x+b^2+c^2-bc$

) dresser le tableau de variations de f

) en déduire que $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$

Exercice 4

On considère les fonctions f et g définies par :

$g(x)=(x-1)^3$ et $f(x)=-1+\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}$

1) montrer que $T_g=\left(x+\frac{y-3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(y-1)^2$
2) vérifier que $(\forall x\in\mathbb{R}^*)\ f(x)=g\left(\frac{1}{x}\right)$
3) étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^{*+}$ et $\mathbb{R}^{*-}$

Exercice 5

soit la fonction f telle que $f(x)=x^3+x^2+x$

1) montrer que

$$(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2)\ x^2+y^2+xy+x+y+1>0$$

2) étudier le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$
3) on pose $h(x)=\frac{x+\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}}$

a) Vérifier $h(x)=f\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

b) En déduire la monotonie de h

Exercice 6

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$

1) déterminer le domaine D et montrer que la droite (Δ) $x=\frac{1}{2}$ est axe de symétrie
2) a) en utilisant un raisonnement par équivalence successive montrer que f est minorée par 1

b) 1 est-elle valeur minimale de f ?

3) calculer $(f(x))^2$ puis déduire que f est majorée par $\sqrt{2}$. $\sqrt{2}$ est-elle valeur maximale de f ?
4) a) montrer que :

$$T_f=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}-\frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}}$$

b) étudier les variations de f sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ et $\left[\frac{1}{2},1\right]$

5) on pose $h(x)=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x}}$ et $g(x)=\frac{2}{x}$

a) montrer que $h=f\circ g$ puis étudier les variations de h

généralités sur les fonctions

Exercice 6

On considère la fonction f définie par $f(x)=x+\frac{4}{x}$

1) Etudier la parité de f
2) Montrer que 4 est la valeur minimale de f sur $]0,+\infty[$
3) a) montrer que $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\ f(x)-f(y)=(x-y)\left(1-\frac{4}{xy}\right)$

   b) étudier le sens de variation de f sur $]0,2]$ et $[2,+\infty[$

   c) en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^{*-}$

Exercice 7

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x)=4x^2+\frac{1}{x}$

1) montrer que f admet sur $]0,+\infty[$ un extremum en $\frac{1}{2}$ dont on préciseras la nature
2) a) montrer que $\left(\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\right)\ f(x)-f(y)=(x-y)\left(4(x+y)-\frac{1}{xy}\right)$

   b) étudier les sens de variations de f sur les intervalles $\left]0,\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ et $]-\infty,0[$

   c) en déduire que $\left(\forall x\in\left[\frac{1}{3},1\right]\right)\ f(x)\in[3,5]$
3) on pose $g(x)=4x|x|+\frac{1}{x}$

   étudier la parité de g puis étudier les variations de g

Exercice 8

On considère la fonction f définie par : $f(x)=x^3-3x$

1) montrer que pour tous x ; y de $\mathbb{R}$ et $x\neq y$ on a : $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}=x^2+y^2+xy-3$
2) étudier le sens de variation de f sur $[1,+\infty[$; $]-\infty,-1]$ et $[-1,1]$
3) soient $a_n,\dots\dots\dots,a_2,a_1$ des réels de $\mathbb{R}^+$, tels que : $a_1\times a_2\times\dots\dots\times a_n=1$

   Montrer que $(2+a_1^3)(2+a_2^3)\times\dots\dots\times(2+a_n^3)\geq 3^n$
4) soit h la fonction telle que : $h(x)=(x-1)\sqrt{x+2}$

   Vérifier que $f\left(\sqrt{x+2}\right)=h(x)$ en déduire les variations de h sur $[-1,+\infty[$ et $[-2,-1]$

Généralités sur les fonctions :

Exercice ① : Etudier l'égalité de f et g dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$; $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$

2) $f(x) = (\sqrt{x} + \sqrt{x-1})^2$; $g(x) = (\sqrt{x})^2 + (\sqrt{x-1})^2$

3) $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}$; $g(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x}$

Exercice ② : On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x-1}$$

1) Déterminer D_f.

2) Montrer que f est minorée par 0 sur D_f ; et que f est majorée par : $\frac{\sqrt{2}}{2}$ sur D_f.

Exercice ③ : On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x|x|}{x^2+1}$$

1) Etudier la parité de f.

2) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+ ; 0 \leq f(x) < 1$

3) a - Montrer que ; pour tout (x, y) de $(\mathbb{R}^+)^2$; $\frac{f(x) - f(y)}{x-y} = \frac{(x+y)}{(x^2+1)(y^2+1)}$

b - Etudier le sens de variations de f sur $\mathbb{R}^+$; puis déduire le sens de variations de f sur $\mathbb{R}^-$

Exercice ④ : On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x + \frac{4}{x}$$

1) Etudier la parité de f.

2) Montrer que 4 est la valeur minimale de f sur $\mathbb{R}^*_+$

3) a - Montrer que pour tout $(x ; y)$ de $\mathbb{R}^2$; $f(x) - f(y) = (x-y)\left(1 - \frac{4}{xy}\right)$

b - Etudier le sens de variations de f sur $]0 ; 2]$ et $[2 ; +\infty[$.

c - En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^*_-$.

Exercice ④ : Soit g la fonction définie par : $g(x) = x^2 - \frac{2}{x} + 1$

1) Montrer que g est croissante sur $]1 ; +\infty[$

2) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+x-2}}$

a) Montrer que $D_f =]1 ; +\infty[$

b) Vérifier que : $\forall x \in D_f ; f(x) = \frac{1}{\sqrt{g(x)}}$

c) En déduire le sens de variations de f.

Exercice ⑤ : On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x}$$

1) Montrer que f est minorée.

2) a - Montrer que f est majorée par $\frac{1}{2}$.

b. $\frac{1}{2}$ est-elle une valeur maximale de f ?

3) On pose : $h(x) = \sqrt{x-1}$ et $g(x) = \frac{x}{x^2+1}$

a - Montrer que $T_g = \frac{1-xy}{(1+x^2)(1+y^2)}$

b - Etudier les variations de g sur $[0;1]$ et sur $[1;+\infty[$

c - Vérifier que $f = g \circ h$; puis Etudier les variation de f sur D_f.

Exercice ⑥ : Soient a ; b et c des reels de $\mathbb{R}^+$.

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x^2 - (b+c)x + b^2 + c^2 - bc$$

1) Dresser le tableau de variations de f.

2) En déduire que :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$$

Exercice ⑦ : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\cos x - x$$

1) a - Montrer que : pour tout x de $I = [0;\pi]$; $-\pi-2 \leq f(x) \leq 2$

b - Etudier la monotonie de la fonction $x \mapsto \cos x$ sur I

c - Déduire la monotonie de la fonction f.

2) On pose $g(x) = f(4x)$

Etudier la monotonie de la fonction g sur $[0;\frac{\pi}{4}]$

3) On pose : $h(x) = (2\cos x - x)^2$

a - Déterminer la fonction u tq : $h = u \circ f$.

b - Déterminer la monotonie de h sur $[0;\frac{\pi}{4}]$

Exercice ⑧ : Soient f et g deux fonctions

$$f(x) = \max\left(x ; \frac{1}{x^2}\right)$$

et $g(x) = \min(x^2 ; \sqrt{x})$

1) Calculer : $(f+g)(1)$ et $(f-g)(1)$ et $\left(\frac{f}{g}\right)(1)$.

2) Calculer : $(f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right)$

3) Calculer :

a) $g \circ f(x)$ si : $x > 1$

b) $g \circ f(x)$ si : $0 < x < 1$

Prof : Asma OULBAZ