1Bac Sc.Ex Biof
2022/2023

Série 1 : Notions de Logique

Lycée IBN SINA
P. AFKIR

Exercice 1

Écrire à l'aide de quantificateurs, les propositions suivantes:

a. Le carré de tout réel est positif.

b. Certains réel est strictement supérieur à leur carré.

c. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.

d. Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.

e. Il existe un entier multiple de tous les autres.

f. Pour tout nombre réel x, si le carré de x est supérieur ou égale à 4, alors x est supérieur ou égale à 2.

Exercice 2

Déterminer la valeur de vérité, puis nier les propositions suivantes :

P : $(\exists x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R}) : x \leq y$.

Q : $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists n \in \mathbb{Z}) : n > x$.

R : $(\forall y \in \mathbb{R}^*)\ (\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 - xy + y^2 = 0$.

Exercice 3

Soit a un entier naturel.
Montrer que : $\sqrt{a^2 + \sqrt{4a^2 - \sqrt{16a^2 + 8a + 3}}} \notin \mathbb{N}$.

Exercice 4

Montrer que : $\sqrt{4 - \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 5

Montrer que : $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 6

Soit a un réel strictement positif tel que :

$$a^4 + 8a^3 + 18a^2 + 8a - 3 > 0.$$

Montrer que : $\sqrt{3 + \sqrt{3}} - 2 < a$.

Exercice 7

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{Z})$: $\frac{4n+3}{6} \notin \{\frac{3m+2}{3} \ / \ m \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 8

Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})$:

$$\cos^3(x) - \sin^3(x) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \cos(x) = 1 \\ \sin(x) = 0 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} \cos(x) = 0 \\ \sin(x) = -1 \end{cases}$$

Exercice 9

Montrer que : $(a+b+c)^2$

$$\forall (a,b,c) \in (\mathbb{R}^*)^3 \ ; \ a+b+c = 0 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

Exercice 10

Soient a, b, c, d et e des réels dans l'intervalle $[-1, 1]$. Montrer que :

$$a + b + c + d + e = 0 \Rightarrow |a + 2b + 3c + 4d + 5e| \geq 7.$$

Exercice 11

Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : (3 \text{ ne divise pas } n^2 + 1).$$

Exercice 12

Soient a, b et c trois réel avec $c > 0$.Montrer que :

$$(|a| < c \text{ et } |b| < c) \Longleftrightarrow |\frac{a+b}{2}| + |\frac{a-b}{2}| < c.$$

Exercice 13

Soient a, b et c trois réel strictement positifs. Montrer que :

$$a + b + c = 1 \Longrightarrow \sup(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}) \geq 3.$$

Exercice 14

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation :

$$|x - 1| + |x + 1| - |x| = 0.$$

Exercice 15

Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation :

$$\frac{2\sqrt{x+1}}{1 - 2\sqrt{3-x}} < 1.$$

Exercice 16

Soient a, b et c trois entiers relatifs impairs.
Montrer que l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$.

Exercice 17

Soient x et p des réels strictement positifs. Montrer que :

$$x^5 - x^3 + x = p \Longrightarrow x^6 \geq 2p - 1.$$

Exercice 18

Soient a, b, c et d des entiers naturels tels que :
$1 < a < b < c < d$. Montrer que :

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{abcd} \leq \frac{31}{24}.$$

Exercice 19

Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que :

$$a + b = 1 \Longrightarrow (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ (1 + \frac{1}{a^n})(1 + \frac{1}{b^n}) \geq (1 + 2^n)^2.$$

Exercice 20

encadrement

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\sqrt{n^2 + 7n + 12} \notin \mathbb{N}$.

Exercice 21

encadrement

Montrer que :

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_-^*)^2 \ ; \ x^2 + y^2 = 1 \Longrightarrow -\sqrt{2} \leq x + y < 1.$$

Exercice 22

Soient a, b, c et d des réels strictement positifs et deux à deux distincts. Montrer que :

$$abcd \leq (\frac{a+b+c+d}{4})^4$$

Exercice 23

Montrer que :

$$\forall(a,b,x,y)\in(\mathbb{R}^*)^4 \; ; \; ax+by=1 \Longrightarrow \frac{1}{x^2+y^2}\leq a^2+b^2.$$

Exercice 24

Soient a, b et c des longueurs d'un triangle tels que $a+b+c=1$.
Montrer que :

$$a^2+b^2+c^2<\frac{1}{2}.$$

Exercice 25

Soit n un entier naturel non nul. Montrer que si $3n+1$ est un carré parfait, alors $n+1$ est la somme de trois carrés parfaits.

Exercice 26

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$1\times 2+2\times 3+\ldots+n\times(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

Exercice 27

Soit α une solution de l'équation $x+\frac{1}{x}=3$. Montrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*) \; : \; \alpha^n+\frac{1}{\alpha^n}\in\mathbb{N}.$$

Exercice 28

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n=(n+1)(n+2)\ldots(n+n) \quad et \quad T_n=2^n\times 1\times 3\times 5\times\ldots\times(2n-1).$$

Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$: $S_n=T_n$.

Exercice 29

Soient $a\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$ et

$$S_n=\frac{a+1}{2}+\frac{a+3}{4}+\frac{a+7}{8}+\ldots+\frac{a+2^n-1}{2^n}.$$

Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $S_n=\frac{(a-1)(2^n-1)}{2^n}+n$.

Exercice 30

Montrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1,2\}) \; ; \; (1+\frac{1}{n})^n<n.$$

Exercice 31

Montrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*) \; ; \; (11 \text{ divise } 10^n-(-1)^n).$$

Exercice 32

Montrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*) \; ; \; \prod_{k=0}^{n}(1+\frac{1}{2k+1})^2>2n+3.$$

Exercice 33

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $a_1,a_2,\ldots,a_n$ des réel strictement positifs.
Montrer que :

$$(\sum_{k=1}^{n}a_k)(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k})\geq n^2.$$

Exercice 34

Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $a_1,a_2,\ldots,a_n$ des réel strictement positifs.
Montrer que :

$$\prod_{k=1}^{n}(1+a_k)\geq 1+\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

Exercice 35

1) Montrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\;(\exists(p_n,q_n)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}) \; : \; \begin{cases}(2+\sqrt{3})^n=p_n+q_n\sqrt{3}\\ 3q_n^2=p_n^2-1\end{cases}$$

2) Montrer que :

$$(\forall(x,y)\in\mathbb{Z}^2) \; : \; x+y\sqrt{3}=0\Longrightarrow x=y=0.$$

3) Montrer que le couple (p_n,q_n) est unique.

4) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $2p_n-1\leq(2+\sqrt{3})^n<2p_n$.

Exercice 36

Montrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*) \; : \; \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

Exercice 37

Montrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*) \; : \; \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

Exercice 38

Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; 5 divise 7^n-2^n.

LOGIQUE TD 2

Exercice 1

Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes :

- $P : (\forall x \in \mathbb{Z})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ \ xy^2 + y + x + 1 = 0$
- $Q : (\forall x \in \mathbb{Z})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ \ xy^2 + y + x + 1 = 0$
- $R : (\exists x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ \ y^2 + x^2 + 2x = 0$

Exercice 2

Donner la négation des propositions suivantes :

$P : (\forall \epsilon > 0)\ \ (\exists x \in \mathbb{Q}^{*+})\ \ 0 < x < \epsilon$

$Q : (\forall x \in \mathbb{R})\ \ (\exists! Y \in \mathbb{R}^{*+})\ \ x * Y = x + Y$

Exercice 3

1. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
2. Soit $\alpha \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ montrer que $\alpha + \frac{1}{n\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$
3. soit $n \in \mathbb{N}^*$ montrer que $n^2 + 7n + 12 \notin \mathbb{N}$
4. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall p \in \mathbb{N})\quad n^2 \quad 1 \neq p^2$

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(x_0; x_1; x_2; \ldots; x_n) \in [0;1]^{n+1}$ tel que $1 \geq x_n \geq \ldots \geq x_2 \geq x_1 \geq x_0 \geq 0$ Montrer que $(\exists i \in 0; 1; 2; 3; \ldots; n-1)\quad x_{i+1} - x_i \leq \frac{1}{n}$

Exercice 5

Un ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est dit ouvert de $\mathbb{R}$ si la propriété suivante est vérifié $(\forall x \in \mathbb{A})(\exists \epsilon > 0)\ \ ]x-\epsilon; x+\epsilon[\subset A$

1. Montrer que $]0;1[$est un ouvert de $\mathbb{R}$
2. Montrer que $[0;1[$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$

Exercice 6

Monter par récurrence que : pour tout entier n et pour tout réel $x > 0$ on a :$(1+x)^n \geq 1 + nx$
[ind : $(1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2$]

Exercice 7

Démontrer les énoncés suivantes par récurrence :

1. Pour tout naturel n On a $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$
2. Pour tout naturel n On a $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
3. Pour tout entier naturel n ; $10^n - (-1)^n$ est divisible par 11

Exercice 8

1. Partager un carré en 4 carré ; puis en 6 ; 7 ; 8 ;9 et 10 carré.
2. Peut-on partager un carré en 3 ou 5 carré.
3. Montrer par récurrence que pour tout naturel $n \geq 6$ on peut partager un carré en n carré.

Lycée technique Lalla Khadija | 2022 / 2023

Exercice 1

Écrire les propositions suivantes à l'aide des connecteurs logiques et des quantificateurs.

1. P : « Pour tous rationnels x et y tels que $x < y$ il existe un rationnel z tel que : $x < z < y$ »
2. Q : « il n'existe aucun rationnel r solution de l'équation $r^2 = 3$ ».
3. R : « la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$ ».

Exercice 2

Donner la négation et la valeur de vérité des propositions suivantes :

1. $P : (\exists x \in \mathbb{R});\ \left(\cos x > \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$
2. $Q : (\forall x > 0);\ \sqrt{x^2} = x$.
3. $S : (\forall x > 0);\ \sqrt{x^2+1} - x \geq 0$
4. $R : (\forall y \in R^*)(\exists x \in R)\ ;\ x^2 - xy + y^2 = 0$
5. $T : (\forall x \in \mathbb{Q}); x^2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$
6. $M : \forall (a;b) \in \mathbb{R}^{*2};\ \frac{a}{b} > 0 \Leftrightarrow ab > 0$
7. $V : (\exists n \in N^*)(\forall x \in \mathbb{R})\ ;\ \frac{x^{2n}}{x^2+3} > 1$
8. $W : (\exists x \in \mathbb{R}^+);\ \left(x^2 \leq x \text{ ou } 1 + \frac{1}{x} < 0\right)$

Exercice 3 — *raisonnement par contre-exemple*

Montrer que chacune des propositions suivantes sont fausses en utilisant le raisonnement par contrer exemples :

1. $P : (\forall x > 0);\ \sqrt{x} \leq x$.
2. $Q : (\forall x > 0);\ x + \frac{1}{x} > 2$.
3. $R : (\forall n \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{N}); x < n$.
4. $M : \forall (a\,;b) \in R^2\ ;\cos(a+b) = \cos a + \cos b$
5. $N : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}); \frac{4xy}{4+y^2} > 1$
6. $S : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R});\ x^2 - xy + y^2 = 0$.

Exercice 4 — *raisonnement par contraposée*

Montrer que :

1. $x \neq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} \neq 1 + \frac{x}{2}$
2. $(xy \neq 1 \text{ et } x \neq y) \Rightarrow \left(\frac{x}{x^2+x+1} \neq \frac{y}{y^2+y+1}\right)$ *avec x ; y et z sont des réels* .
3. *Pour tous nombres réels* x *et* y *et* z : $x + y > z \Rightarrow \left(x > \frac{z}{2} \text{ ou } y > \frac{z}{2}\right)$.
4. $\forall\ (x;y) \in [1;+\infty[^2;\ x \neq y \ \Rightarrow\ \sqrt{x} + \sqrt{x-1} \neq \sqrt{y} + \sqrt{y-1}$
5. 3 *divise* $n^2 \Rightarrow 3$ *divise* n , *avec n est entier naturel* .
6. *n premier* $\Rightarrow n \neq 2$ *ou n est impair* .

Exercice 5 — *raisonnement par disjonction des cas*

1) *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* : $|x+1| + |x-1| = |x|$.

2) *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation suivante* : $\sqrt{x^2 - 5x + 6} \leq 2x - 3$

3) *Montrer que* : $\forall x \in \mathbb{R}, \sqrt{x^2+1} > x$; *puis déduire que* $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} - x + y > 0$.

4) *Soit m un paramètre réel, discuter les solutions de l'équation* $mx^2 - (m+1)x + m - 1 = 0$.

5) *Soit n un entier impair montrer que* : $n^2 - 1$ *est divisible par* 8 .

6) *Soit* a ;b *et* c *trois réels tels que* c *est positif montrer que* :$(|a| \leq c \text{ et } |b| \leq c) \Rightarrow |a+b| + |a-b| \leq 2c$.

Exercice 6 — *raisonnement par équivalences*

1) *Soient* a , b et c *des réels. montrer que* $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$

2) *Montrer que* :$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 , x^2 + y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$

3) *Montrer que* : $|x+y| = |x| + |y| \Leftrightarrow xy \geq 0$

4) *Montrer que* :$\forall (x;y) \in (\mathbb{R}^+)^2; \sqrt{x+9} + \sqrt{y+4} = 5 \Leftrightarrow x = y = 0$

Exercice 7 *raisonnement par absurde*

1) Soit a et b deux réels positifs ; Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

2) Soit a un réel , montrer que $(\forall \varepsilon > 0) , |a| < \varepsilon$ alors $a = 0$.

3) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^* ; \sqrt{x^2+1} \neq 1 + \frac{x^2}{2}$.

4) Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ et $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ puis $(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \notin \mathbb{Q}$.

5) Soient a et b deux entiers relatifs ,montrer que $a + b\sqrt{2} = 0$ alors $a = b = 0$.

6) Soit n un entier naturel , montrer que : $\frac{n+1}{n+2} \notin \mathbb{N}$; $\sqrt{16n^2+8n+3} \notin \mathbb{N}$; $\sqrt{\frac{n}{n+1}} \notin \mathbb{Q}$.

7) Soient x et y deux réels ; montrer que le système : $\begin{cases} 5x - 6y > 7 \\ 3x + 2y \geq 9 \\ 2x - y < 4 \end{cases}$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8 *raisonnement par récurrence*

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ;\ 2^n > n$

2) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* ;\ 1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots\cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$

3) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} ;\ 1 + 2 + 2^2 + \cdots\cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

4) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^* ; 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots\cdots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

5) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; 17 divise $3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$.

6) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$; 3 divise $n^3 + 8n$.

7) Montrer que : $\forall n \geq 2 ;\ n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$, on rappel que $(n! = n \times (n-1) \ldots\ldots\ldots\ldots \times 2 \times 1)$.

8) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; on pose : $a_n = \underbrace{77 \ldots 7}_{n\ fois}$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{7}{9}(10^n - 1)$.

Exercice 9

Soit , b et c des réels .

1) Montrer l'implication suivant :$(|b| < c$ et $|a| < c) \Rightarrow \left|\frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{a-b}{2}\right| < c$.

2) Montrer que : $a^2 + b^2 = 1 \Longrightarrow |a+b| \leq \sqrt{2}$.

3) En déduire que : $\left|\frac{a+b}{2}\right| + \left|\frac{a-b}{2}\right| < c \Rightarrow (|b| < c$ et $|a| < c)$.

4) Montrer que :$(|a-b| = |a-c| + |c-b|) \Leftrightarrow a \leq c \leq b$ ou $b \leq c \leq a$.

Exercice 10

Un père a demandé de diviser entre ses trois fils 21 barils, sept barils remplis et sept à moitié remplis et sept vides, afin que chacun obtienne le même nombre et la même quantité de liquide sans ouvrir des barils . Comment cela pourrait-il ?

1- Donner la loi logique concernant la contraposée

2- Donner la négation des propositions suivantes :

a- (P) $(\forall x\in\mathbb{R})\ x^2-|x|+1\geq 0$ *et* $-1\leq x\leq 1$

b- (Q) $(\forall x\in\mathbb{R})\ \forall(a,b)\in\mathbb{R}^2\left(a\leq x\Rightarrow b<x\right)\Rightarrow a\geq b$

3- Déterminer la valeur de vérité des propositions suivantes en justifiant la réponse

c- $(\forall x\in\mathbb{R})\ (\exists y\in\mathbb{R})(x-5y=4)\Rightarrow(\exists y\in\mathbb{R})\ (\forall x\in\mathbb{R})(x-5y=4)$

d- $(\forall x\in\mathbb{R})\ (\forall y\in\mathbb{R})(x-3)^2+(y^2+2)=2\Rightarrow\ (x=3 \text{ et } y=0)$

4- Soit $(x,y)\in\mathbb{Q}_+^{*2}$ on suppose que $\sqrt{x}\notin\mathbb{Q}$ et $\sqrt{y}\notin\mathbb{Q}$

e- Montrer par absurde que $\sqrt{x}+\sqrt{y}\notin\mathbb{Q}$

EXERCICE 2

1- Montrer par récurrence

a- $(\forall n\in\mathbb{N})(\exists k\in\mathbb{N})\ 5^{3^n}+1=3^{n+1}k$

b- $(\forall n\in\mathbb{N})\sum_{i=0}^{i=n}2\times 3^i=3^{n+1}-1$

2- On considère la fonction g définie de $[0,1]$ vers $[0,1]$ qui vérifie $|g(x)-g(y)|\geq|x-y|$

a- Montrer que : ~~$(g(0)=0$ et $g(1)=1)$ ou $(g(0)=1$ et $g(1)=0)$~~

On suppose $g(0)=0$ Montrer que $\forall x\in[0,1]\ g(x)\geq x$ puis déduire que $\forall x\in[0,1]\ g(x)=x$

3- Montrer que $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2\left[a\neq\frac{-b}{2}\Rightarrow\frac{a-b}{a+b}\neq-3\right]$

Exercice : 1

Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes

$(\exists y\in\mathbb{R})(\forall x\in\mathbb{R})\ x^2\geq 10y$	$(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})\ x+y>2$	$(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})\ x^2+y\leq xy$
$(\forall x\in\mathbb{R}^{*+})\ \ x+\frac{1}{x}\geq 2$	$(\exists x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})\ x+2y\leq 1$	$(\forall a\in\mathbb{R})(\exists b\in\mathbb{R})\ a^2+2b^2>4ab$

Exercice : 2

1) montrer que : $(\forall(a,b)\in[2,+\infty[^2)\ \ a\neq b\Rightarrow\sqrt{1-\frac{4}{a^2}}\neq\sqrt{1-\frac{4}{b^2}}$

2) soient b . a de $\mathbb{R}$ tels que $a+b\neq 0$ $a+b\neq 0$. montrer que $a\neq-\frac{1}{2}b\Rightarrow\frac{a-b}{a+b}\neq 3$

3) $(\forall x\in\mathbb{R})(\forall y\in\mathbb{R})\ (xy\neq 1 \text{ et } x\neq y)\Rightarrow\left(\frac{x}{x^2+x+1}\neq\frac{y}{y^2+y+1}\right)$

4) a) quelle est la négation de la proposition P "$(\forall x\in\mathbb{R})(\exists y\in\mathbb{R})\ x^2+y-xy=0$"

b) montrer que P est fausse

Exercice : 3

Montrer par récurrence que :

1) $\forall n\in N$, 9 *divise* $16^n+12n-1$

2) $\forall n\in N^*, \sum_{k=1}^{n}k(n+k)=\frac{n(n+1)(5n+1)}{6}$

3) $\forall n\in N^*-\{1\}; (2\times 3^2)+(2^2\times 3^3)+\cdots+(2^{n-1}\times 3^n)=\frac{18}{5}(6^{n-1}-1)$

Exercice : 4

1) monter que $(\forall(x.y.z)\in\mathbb{R}^3)\left(\sqrt{x}+\sqrt{y-1}+\sqrt{z-2}=\frac{x+y+z}{2}\right)\Rightarrow(x=1 \text{ et } y=2 \text{ et } z=3)$

3) soient b . a deux réels et c de $\mathbb{R}^{+*}$ tels que $|a+b|\leq c$ et $|a-b|\leq c$

Montrer que $|a|+|b|\leq c$ et $|ab|\leq\frac{c}{4}$

2

10

Soient a et b deux réels positifs.

ontrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad a^n + b^n \leq (a+b)^n$.

11

Soit x un réel positif.

ontrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 + nx \leq (1+x)^n$.

12

Soit x un réel positif.

ontrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 \leq (1+x)^n$$

13

Soit x un réel positif. On pose :

$$u = nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3$$

ontrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u \leq (1+x)^n - 1$.

Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \; 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{(n+1)n}{2}\right)^2$$

Soit n un entier naturel.

pose :

$$u_n = (n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+n)$$

$$v_n = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots\cdots \times (2n-1)$$

rer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = 2^n v_n$.

Soit n un entier naturel.

ose :

$$u_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots\cdots + \frac{1}{2n}$$

$$v_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

r que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = v_n$.

117

Soit n un entier naturel.

On pose :

$$u_n = 1.2.3 + 2.3.4 + \cdots + n(n+1)(n+2)$$

$$v_n = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = v_n$.

118

Soit n un entier naturel.

On pose :

$$u_n = 2.1^2 + 3.2^2 + \cdots + (n+1)n^2$$

$$v_n = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$$

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = v_n$.

119

x est un nombre réel distinct de 1.

Soit n un entier naturel

On pose :

$$u_n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n$$

$$v_n = \frac{x - (n+1)x^{n+1} + nx^{n+2}}{(x-1)^2}$$

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = v_n$.

120

x est un nombre réel tel que : $|x| \neq 1$

Soit n un entier naturel.

On pose :

$$a_n = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{1+x^2} + \cdots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}}$$

$$b_n = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad a_n = b_n$.

121

Montrer que pour tout entier naturel n on a : 23 divise l'entier $5^{2n+1} + 2^{n+4} + 2^{n+1}$.

Montrer que pour tout entier naturel n on a : 25 divise l'entier $2^{n+2} \times 3^n + 5n - 4$.

Montrer que pour tout entier naturel n on a : 19 divise l'entier $3^{3n+2} + 5 \times 2^{3n+1}$.

5 Exercice N°1 :

1. Soit n de $\mathbb{N}^*$.

a - Montrer que : $1+2+3+4+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

b - Comparer les nombres : $A = 2016(1+2+3+4+\cdots+2017)$
et $B = 2017(1+2+3+4+\cdots+2016)$.

2. Soit k de $\mathbb{N}^*$ tel que : $1 \leq k \leq n$. a - vérifier que : $\frac{1}{n+k} = \frac{1}{n}\left(1-\frac{k}{n+k}\right)$

b - Montrer que : $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{n+n} \leq \frac{3}{4}$.

6 Exercice N°2.

1 - Soient a, b, c et d de $\mathbb{R}_*^+$.

a - Vérifier que : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

b - Montrer que : si $a+b+c+d = 1$ alors $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \geq 16$.

2 - Soient a et b de $\mathbb{R}_*^+$ tels que : $a+b=1$.

a - Vérifier que : $a+b \geq 2\sqrt{ab}$

b - déduire que : $ab \leq \frac{1}{4}$ et $1 - a^2b^2 \geq \frac{15}{16}$.

c - Montrer que : $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}$. $(a+b)^2 + (a-b)^2$

7 Exercice N°3.

1 - Soient x, y et z tels que : $|x+y| \leq z$ et $|x-y| \leq z$

Montrer que : $|x| + |y| \leq z$.

2 - Soient a et x deux réels de $[-1, 1]$.

a - Vérifier que : $|ax^2 - a - x| \leq 1 - x^2 + |x|$.

b - Montrer que : $|ax^2 - a - x| \leq \frac{5}{4}$.

3 - Soient a, b, c et d de $\mathbb{R}_*^+$;

Montrer que : $1 \leq \frac{a}{a+b+d} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{b+c+d} + \frac{d}{a+c+d} \leq 2$.

Exercice N°4.

1 - Soient x, y et z de $\mathbb{R}_*^+$ tels que : $xyz = 1$

Montrer que : $(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2) \geq 8$.

2 - Soient x et y de $\mathbb{R}_*^+$ tels que : $x^2 - y^2 = 1$

a - Vérifier que : $\frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy}$.

b - Montrer que : pour tous n de $\mathbb{N}^*$: $\frac{1}{(x-y)^n} + \frac{1}{(x+y)^n} \geq 2$.

" – "