SÉRIE SUR LES SUITES NUMÉRIQUES

EXERCICE 1 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{3} \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1+(n+2)\,u_n} \end{cases}$

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $v_n = \dfrac{1}{u_n} - n$

1. *Montrer que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est géométrique.*
2. **a)** *Déterminer* v_n *et* u_n *en fonction de* n.

   b) *Calculer en fonction de* n *la somme :* $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$

EXERCICE 2 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_1 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{3u_n+5} \end{cases}$

1. *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ u_n > 0$.
2. *On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{5}{u_n}$.

   a) *Montrer que la suite* (v_n) *est une suite arithmétique dont on déterminera la raison et le premier terme.*

   b) *Déterminer* v_n *et* u_n *en fonction de* n.

EXERCICE 3 .

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} u_0 = 13 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 7 \end{cases}$

1. *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_n < 14$.
2. *Soit* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $v_n = 14 - u_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

   a) *Montrer que la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique de raison* $\dfrac{1}{2}$ *puis écrire* v_n *en fonction de* n.

b) *En déduire que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n.$

EXERCICE 4 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} = \dfrac{7u_n - 25}{u_n - 3} \end{cases}$

1. *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_n \neq 5.$

2. *On considère la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $v_n = \dfrac{1}{u_n - 5}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

   a) *Montrer que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite arithmétique.*

   b) *Déterminer* v_n *puis* u_n *en fonction de* n.

3. **a)** *Calculer :* $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ *en fonction de* n.

   b) *On pose :* $P_n = 2^{v_0} \times 2^{v_1} \times ... \times 2^{v_n}$ *déterminer* P_n *en fonction de* n.

EXERCICE 5 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2 + u_n - 2}{u_n^2} \end{cases}$

1. *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_n \geq 2.$

2. **a)** *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} - 2 \leq \dfrac{1}{4}\left(u_n - 2\right).$

   b) *En déduire que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 0 \leq u_n - 2 \leq \left(\dfrac{1}{4}\right)^n.$

EXERCICE 6 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n^3}{3u_n^2 + 1} \end{cases}$

1. **a)** *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ \ u_n > 0.$

   b) *Étudier la monotonie de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2. **a)** *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n.$

   b) *Déduire que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n.$

EXERCICE 7 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3}{u_n + 2} \end{cases}$

1. **a)** *Montrer par récurrence que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante.*

   b) *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée par* 2.

2. *On pose :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{3}}{u_n + \sqrt{3}}$.

   a) *Montrer que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique en déterminant sa raison et son premier terme.*

   b) *Déterminer* u_n *en fonction de* n.

EXERCICE 8 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$

1. *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 \leq u_n \leq 4$.

2. *Montrer que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*

   a) *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 4 - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(4 - u_n)$.

   b) *En déduire que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 4 - u_n \leq 4\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

EXERCICE 9 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = 3 \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = \dfrac{8(u_n - 1)}{u_n + 2} \end{cases}$

1. **a)** *Calculer* u_1.

   b) *Vérifier que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} - 4 = \dfrac{4(u_n - 4)}{u_n + 2}$ *et* $u_{n+1} - 2 = \dfrac{6(u_n - 2)}{u_n + 2}$.

   c) *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 2 < u_n < 4$.

2. **a)** *Montrer que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante.*

   b) *En déduire que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 3 \leq u_n < 4$.

3. **a)** *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 < 4 - u_{n+1} \leq \dfrac{4}{5}(4 - u_n)$.

   b) *En déduire que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 < 4 - u_n \leq \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.

4. *On pose* $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 2}$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

   a) *Montrer que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique de raison* $\dfrac{2}{3}$.

   b) *Déterminer* v_n *et* u_n *en fonction de* n.

   c) *Calculer en fonction de* n *la somme :* $S_n = \dfrac{2}{u_0 - 2} + \dfrac{2}{u_1 - 2} + \ldots + \dfrac{2}{u_n - 2}$.

EXERCICE 10 .

1. *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = \dfrac{10}{3} \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 - 3u_n + 9}{u_n} \end{cases}$

   a) *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n \geq 3$.

   b) *En déduire que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante et que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 3 \leq u_n \leq \dfrac{10}{3}$.

2. *On considère la suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} v_0 = \dfrac{1}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ v_{n+1} = \dfrac{2v_n^2}{1 + v_n^2} \end{cases}$

   a) *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ v_n > 0$ *et* $v_n \leq \dfrac{1}{2}$.

   b) *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \leq 1$. *En déduire que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

3. *Soit* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $\begin{cases} t_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ t_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1}{2}t_n + \dfrac{3}{2}} \end{cases}$

   Montrer que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante.*

4. *Soit* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite définie par :* $\begin{cases} w_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}),\ w_{n+1} = f(w_n) \end{cases}$ *où* $f(x) = x^2 - 2x$.

   a) *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ w_n \geq 3$.

   b) *Montrer que la suite* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*

FIN

Série d'exercices sur les suites numériques

Exercice 1 .

Calculer en fonction de n le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans chacun des cas suivants :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k - 5^{2k}}{\pi^{k+1}} \qquad et \qquad u_n = \prod_{k=1}^{n} 2^k.\pi^{3-k}$$

Exercice 2 *On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$u_0 = 0 \quad et \quad u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}\ ,\ pour\ tout\ n \in \mathbb{N}.$$

1. *Calculer u_1 et u_2.*
2. *Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n < 4$.*
3. *Étudier le monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*
4. *On considère la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$v_n = \frac{u_n - 4}{u_n + 1}\ ,pour\ tout\ n \in \mathbb{N}$$

   a) *Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, on déterminera son raison.*

   b) *Exprimer v_n puis u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

5. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k+1}$.*

   Déterminer l'expression de S_n en fonction de n.

Exercice 3 *On considère les suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :*

$$u_0 = 2,\quad u_1 = \frac{4}{9} \quad et \quad u_{n+2} = \frac{1}{27}(12u_{n+1} - u_n) \qquad et\ \ v_n = u_n - \frac{1}{3^n},\ \ pour\ tout\ n \in \mathbb{N}.$$

1. *Montrer que :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \frac{1}{9}u_n + \frac{2}{3^{n+2}}$$

2. *Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique, puis exprimer u_n en fonction de n.*
3. *Exprimer en fonction de n la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.*

Exercice 4 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :*

$$u_0 = 1 \quad et \quad u_{n+1} = 2u_{n+1} + n + 1, \quad pour\ tout\ n \in \mathbb{N}.$$

1. *Calculer* u_1 *et* u_2.
2. *Montrer par récurrence que :*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 2^n \left(1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k}\right)$$
3. *Montrer par récurrence que :*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$
4. *En déduire que :*
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 \times 2^n - n - 2$$

Exercice 5 *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *la suite numérique définie par :*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

1. *Calculer* u_1 *et* u_2.
2. *Étudier la monotonie de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
3. *Montrer que :*
$$\forall p \in \mathbb{N}^* \backslash \{1\},\ \ \frac{1}{\sqrt{p-1}} - \frac{1}{\sqrt{p}} \geq \frac{1}{2p\sqrt{p}}$$
4. *En déduire que :*
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ 1 \leq u_n \leq 3 - \frac{2}{n}$$

DEVOIR

Exercice 1 $(U_n)_n$ المتتالية une suite réelle telle que : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{6U_n}{1+15U_n}$

1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n > \dfrac{1}{3}$

2) Étudier la monotonie de $(U_n)_n$ en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n \leq 1$

3) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_{n+1} - \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{6}\left(U_n - \dfrac{1}{3}\right)$ en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n - \dfrac{1}{3} \leq \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$

4) on pose $V_n = 1 - \dfrac{1}{3U_n}$ pour tout entier naturel n

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{6}$

b) calculer V_n puis U_n en fonction de n

c) on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} V_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} \dfrac{1}{U_k}$ déterminer S_n en fonction de n

en déduire que $T_n = 3n + \dfrac{3}{5} + \dfrac{12}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n+1}$

Exercice 2 Soit la suite $(U_n)_n$ définie par $U_1 = 5$ et $U_{n+1} = 3U_n + 4^n$. on pose $V_n = 4U_n - U_{n+1}$

1) calculer U_0 , U_2 et V_0

2) montrer que $(V_n)_n$ est géométrique de raison $q = 3$ et calculer V_n en fonction de n

3) on pose $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} V_k$ et $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} U_k$

a) déterminer T_n en fonction de n

b) montrer que $V_n = U_n - 4^n$ en déduire que $U_n = 4^n + 3^{n-1}$

c) montrer que $T_n - 3S_n = U_0 - U_{n+1}$ puis déterminer S_n en fonction de n

Exercice 3 *On considère la suite $(U_n)_n$ telle que $U_0 = 0$; $U_1 = 1$ et $U_{n+2} = \dfrac{1}{6}U_{n+1} + \dfrac{1}{6}U_n$*

On pose $V_n = U_{n+1} - \dfrac{1}{2}U_n$ et $W_n = U_{n+1} + \dfrac{1}{3}U_n$

1) a) montrer que $(V_n)_n$ est géométrique et calculer V_n en fonction de n

b) montrer que $(W_n)_n$ est géométrique et calculer W_n en fonction de n

2) on pose $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} W_k$ et $T_n = \sum_{k=0}^{k=n} U_k$

a) calculer S_n en fonction de n et déterminer U_n en fonction de n

c) prouver que $T_n = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{10}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n - \dfrac{6}{5}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

Suites numériques

Exercice 1

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$$

a) Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq U_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

b) En déduire que $(U_n)_{n\geq 1}$ est bornée

Exercice 2

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_0=-1$, $U_1=\frac{1}{2}$ et $U_{n+2}=U_{n+1}-\frac{1}{4}U_n$

1) on pose $V_n=U_{n+1}-\frac{1}{2}U_n$ et $W_n=2^n U_n$

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique puis calculer V_n en fonction de n

b) montrer que $(W_n)_n$ est une suite arithmétique puis calculer W_n en fonction de n

2) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_n = \frac{2n-1}{2^n}$

3) on pose $S_n=\sum_{k=0}^{k=n} U_k$ prouver que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad S_n = 2-\frac{2n+3}{2^n}$$

Exercice 3

Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite telle que :

$$U_0=2 \quad \text{et} \quad U_{n+1}=\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{2}\left(U_n^2-U_n+\frac{1}{2}\right)}$$

On pose $V_n=U_n^2-U_n$ pour tout entier n de $\mathbb{N}$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_n \geq 1$

2) a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique

b) en déduire que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad U_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{8}{2^n}}$$

3) démontrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < U_n - 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Exercice 4

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_0=1$ et $U_{n+1}=\frac{7U_n+6}{U_n+2}$

1) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 < U_n < 6$

b) étudier la monotonie de $(U_n)_n$

2) on pose $V_n=\frac{U_n-6}{U_n+1}$ pour tout entier naturel n

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite géométrique

b) déterminer U_n en fonction de n

3) montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_{n+1}-6| \leq \frac{1}{2}|U_n-6|$$

4) montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |U_n-6| \leq 5\times\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Exercice 5

Soit $(U_n)_n$ la suite telle que :

$$U_0=1 \quad \text{et} \quad U_{n+1}=U_n^2+U_n$$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_n \geq 1$

2) montrer que $(U_n)_n$ est croissante

3) a) vérifier que $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_{n+1} \geq 2U_n$

b) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_n \geq 2^n$

Exercice 6

$(U_n)_n$ une suite telle que :

$$U_0=-2 \quad \text{et} \quad U_{n+1}=\frac{U_n^2+2}{U_n-2}$$

1) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_n \leq -1$

2) montrer que $(U_n)_n$ est croissante

Suites numériques

3) a) montrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ \ |U_{n+1}+1|\le\frac{1}{2}|U_n+1|$$

b) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})\ |U_n+1|\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$

Exercice 7

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_{n+1}=\dfrac{2U_n}{1+(n+2)U_n}$ et $U_0=\dfrac{1}{3}$

1) calculer U_1

2) on pose $V_n=\dfrac{1}{U_n}-n$

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite arithmétique

b) exprimer U_n en fonction de n

3) calculer en fonction de n la somme $T_n=\dfrac{1}{U_0}+\dfrac{1}{U_1}+.....+\dfrac{1}{U_n}$

Exercice 8

Soit la suite $(U_n)_n$ telle que :

$$U_0=0\ ,\ U_1=1\ \text{ et }\ U_{n+2}=\frac{1}{6}U_{n+1}+\frac{1}{6}U_n$$

1) on pose :

$$V_n=U_{n+1}-\frac{1}{2}U_n\ \text{ et }\ W_n=U_{n+1}+\frac{1}{3}U_n$$

a) montrer que $(V_n)_n$ est géométrique puis déterminer V_n en fonction de n

b) montrer que $(W_n)_n$ est géométrique puis calculer W_n en fonction de n

2) en déduire l'expression de U_n en fonction de n

Exercice 9

On considère les suites $(U_n)_{n\ge1}$ et $(V_n)_{n\ge1}$ telles que $U_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=2n}\frac{(-1)^k}{k}$, $V_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{k=2n+1}\frac{(-1)^k}{k}$

1) montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \ V_n<U_n$

2) montrer que $(U_n)_{n\ge1}$ est décroissante et que $(V_n)_{n\ge1}$ est croissante

Exercice 10 (suite de Fibonacci)

On considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $\begin{cases}U_0=U_1=1\\ U_{n+2}=U_{n+1}+U_n\end{cases}$

1) a) montrer que $U_n>0\ \ (\forall n\in\mathbb{N})$

b) étudier la monotonie de la suite $(U_n)_n$

2) montrer que $U_n\ge n\ \ (\forall n\in\mathbb{N})$

3) montrer que $U_nU_{n+2}+(-1)^{n+1}=(U_{n+1})^2$

4) on pose $x_n=\dfrac{U_{2n-1}}{U_{2n}}$ et $y_n=\dfrac{U_{2n}}{U_{2n+1}}$ pour tout n de $\mathbb{N}^*$

a) montrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \ y_n-x_n=\frac{1}{U_{2n}U_{2n+1}}$$

en déduire $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \ 0<y_n-x_n<\dfrac{1}{n}$

b) montrer que :

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ x_{n+1}-x_n=\frac{1}{U_{2n}U_{2n+2}}$$

et $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\ \ x_n=\dfrac{1}{y_n}-1$

b) montrer que $(x_n)_n$ est croissante et $(y_n)_n$ décroissante

5) on pose $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}\frac{U_k}{3^k}$

a) calculer $3S_n$ puis $3(3S_n-S_n)$

b) en déduire la relation liant U_n ; S_{n-2} , S_n

6) prouver que :

$$(\forall n\in\mathbb{N})\ \ U_n=\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{n+1}-\left(1-\sqrt{5}\right)^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}}$$

le nombre d'or : $\phi=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

1ère bac SM	suites numériques	

Exercice N°4

Soit $(u_n)_n$ la suite telle que :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{8u_n - 8}{u_n + 2} \end{cases}$$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 < u_n < 4$

2) Etudier la monotonie de $(u_n)_n$

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $v_n = \dfrac{u_n - 4}{u_n - 2}$

3) Prouver que $(v_n)_n$ est une suite géométrique

4) Déterminer v_n en fonction de n

5) déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{4\times 3^n + 2^{n+1}}{3^n + 2^n}$

exercice 5

Soit $(u_n)_n$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \dfrac{1}{4}u_n \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Pour tout entier n de $\mathbb{N}$ on pose $v_n = 2^n u_n$

1. montrer que $(v_n)_n$ est arithmétique
2. déterminer v_n puis u_n en fonction de n

on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $T = \prod_{k=1}^{n} u_k$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

3. montrer que $S_n = 3 - \dfrac{n+3}{2^n}$ et $T_n = \dfrac{(n+1)!}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

exercice N°6

$(u_n)_n$ une suite telle que $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 4n - u_n \end{cases}$

1. calculer u_1 ; u_2 ; u_3 et u_4
2. montrer que $(u_{2n})_n$ est arithmétique
3. déterminer u_{2n} puis u_{2n+1} en fonction de n

pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $v_n = u_n + 1 - 2n$

4. prouver que $(v_n)_n$ est géométrique
5. déterminer v_n et u_n en fonction de n

Exercice 1

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = 2u_n + 1 \ (\forall n \in \mathbb{N})$$

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $v_n = u_n - \alpha$

1- Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \geq n$

2- Déduire que (u_n) n'est pas majorée

3- déterminer α pour que $(v_n)_n$ soit géométrique

4. on prend $\alpha = -1$ et on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

déterminer v_n et u_n en fonction de n

puis S_n en fonction de n

exercice N°2

On considère la suite $(u_n)_n$ définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n} \quad (\forall n \in IN)$$

On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. montrer que $\forall n \in IN \quad 1 < u_n \leq 2$
2. montrer que $(u_n)_n$ est décroissante
3. montrer que $(v_n)_n$ est une suite arithmétique
4. déterminer u_n en fonction de n puis calculer

$$S_{2017} = \sum_{k=0}^{2016} v_k$$

exercice 3

$(u_n)_n$ une suite telle que : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 3}{4 - u_n} \end{cases}$

Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$

1. montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad -1 \leq u_n \leq 3$
2. étudier la monotonie de $(u_n)_n$
3. a) montrer que $(v_n)_n$ est géométrique

 b) calculer u_n en fonction de n

 c) déterminer :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k \text{ et } P_n = \prod_{k=0}^{n} v_k \text{ en fonction de } n$$

Exercice 14

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{7u_n}{4u_n + 7}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

① a) Calculer u_1 et u_2.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 0$.

c) Montrer que la suite (u_n) est strictement décroissante.

d) En déduire que la suite (u_n) est majorée par 1.

② Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{7}{u_n}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = v_1 + v_2 + ... + v_n$.

Exprimer S_n en fonction de n.

Exercice 35

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 3}{3u_n - 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

① Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N})\quad u_n \neq 1$.

② Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n - 1}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

Exprimer la somme S_n en fonction de n.

Exercice 38

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $u_0 = \sqrt{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{\sqrt{9+u_n^2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

① a) Calculer u_1 et u_2.

b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})\ u_n > 0$.

c) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

② Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $v_n = \dfrac{18}{u_n^2}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est arithmétique et préciser sa raison et son premier terme.

b) Exprimer v_n et u_n en fonction de n.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $S_n = \dfrac{1}{u_0^2} + \dfrac{1}{u_1^2} + \cdots + \dfrac{1}{u_n^2}$.

Exprimer S_n en fonction de n.

EXERCICE (1) 6.5 pts

On considère les suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ telles que :

$$\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n V_n}{U_n + V_n} \end{cases}$$

1) prouver que $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < U_n < V_n$ **1.5pt**

2) montrer que $(U_n)_n$ est croissante et $(V_n)_n$ décroissante **1.5pt**

3) a) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < V_{n+1} - U_{n+1} < \frac{1}{2}(V_n - U_n)$ **1.5pt**

b) déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ 0 < V_n - U_n \leq \frac{1}{2^n}$ **1.5pt**

4) a) montrer que par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_n V_n = 2$ **1.5pt**

b) en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_n < \sqrt{2} < V_n$ **1pt**

EXERCICE (2) 6.5pts

Soit un réel de a $]0, +\infty[$ on considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_0 = b < a$ et $U_{n+1} = \dfrac{a^2}{2a - U_n}$

1) a) vérifier que $U_{n+1} - a = \dfrac{a(U_n - a)}{a + (a - U_n)}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ **1pt**

b) montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})\ U_n < a$ **1.5pt**

2) montrer que $(U_n)_n$ est une suite croissante **1pt**

3) on pose $V_n = \dfrac{a}{a - U_n}$ pour tout entier naturel n **1.5pt**

a) montrer que $(V_n)_n$ est une suite arithmétique puis calculer U_n en fonction de n ; b et a

b) déterminer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{k=n} \dfrac{1}{a - U_k}$ en fonction de n ; b et a **1.5pt**

EXERCICE (3) 3pts *On considère la suite $(U_n)_n$ définie par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1 + 2^n U_n}$*

1) calculer U_1 et U_2 **1.5pt**

2) a) montrer que $\dfrac{1}{U_{n+1}} = \dfrac{1}{U_n} + 2^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ **1.5pt**

b) déduire l'éxpression de U_n en fonction de n

EXCERCICE (4) 2pts

Soit $(U_n)_n$ une suite arithmétique de raison r. On $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$

m et n deux entiers naturels différents **1.5pt**

1) démontrer que $S_m = S_n \Leftrightarrow (m + n - 1)r = -2U_0$ **1pt**

2) en déduire que $S_m = S_n \Rightarrow S_{m+n} = 0$

(2pts) **Question de cours** soit $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$.
Montrer que $(\forall n \in N)$ $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k = V_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

(10pts) **Exercice 1** Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 2U_n - 1 \end{cases} \quad \text{et } (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; V_n = U_n - 1$$

(1pts) 1. Monter que les deux suites $(\forall n \in \mathbb{N})$ $U_n \geq 2$.

(1,5pts) 2. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $U_{n+1} \geq \frac{3}{2}U_n$ et déduire la monotonie de (U_n).

(1pts) 3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $U_n \geq 2(\frac{3}{2})^n$

(1,5pts) 4. Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison q puis donner V_n et U_n en fonction de n.

(1pts) 5. On pose $T_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ montrer que $T_n = 2^{n+1} + n$

6. Soit $(S_n)_n$ la suite définie par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{U_k}$ et On pose $X_n = S_{2n}$ et $Y_n = S_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

(1pts) (a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $Y_n \leq X_n$

(1,5pts) (b) Montrer que (X_n) est décroissante et que (Y_n) est croissante.

$| \;) \leq \sum \frac{1}{U_k} \leq \sum \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^k$

(1,5pts) (c) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $|X_n - S_n| \leq (\frac{2}{3})^n - (\frac{2}{3})^{2n}$

(9pts) **Exercice 2**

Partie I : On pose $(\forall n \in \mathbb{N})$ $T_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{2k+4}$ et $R_n = \sum_{k=0}^{n} 2^{k+3}$

(1pts) 1) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $T_n = \frac{4}{3}\left(2^{2n+4} - 4\right)$

(1pts) 2) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $R_n = 4\left(2^{n+2} - 2\right)$

Partie II : Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites définies par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \sqrt{4U_n + 1} + 4U_n + 1 \end{cases} \quad \text{et } (\forall n \in \mathbb{N}) \;\; V_n = \sqrt{4U_n + 1}$$

$V_0 = 3$

(1pts) 1) Monter que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $U_n \geq 0$.

(1pts) 2) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

(1pts) 3) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $V_{n+1}^2 = 4\left(V_n + \frac{1}{2}\right)^2$ en déduire V_{n+1} en fonction de V_n $V_{n+1} = 2V_n + 1$

4) Soit $(W_n)_n$ la suite définie par : $(\forall n \in \mathbb{N})$ $W_n = 1 + V_n$ $W_0 = 4$

(1,5pts) a) Montrer que la suite (W_n) est géométrique de raison q puis donner W_n en fonction de n.

(1pts) b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $U_n = \frac{1}{4}\left(W_n^2 - 2W_n\right)$

(0,5pts) c) En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $U_n = \frac{1}{4}\left(2^{2n+4} - 2^{n+3}\right)$.

(1pts) d) On pose $(\forall n \in \mathbb{N})$ $S_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$ Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$ $S_n = \frac{1}{3}2^{2n+4} - 2^{n+2} - \frac{2}{3}$

Suites numériques

Exercice 1. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_{n+1} = 5 - \frac{9}{u_n+1} & (\forall n \in \mathbb{N}) \\ u_0 = 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{u_n - 2}$$

montrer que (v_n) est une suite arithmétique et calculer v_n en fonction de n.

Exercice 2. On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3u_n+1} & (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que $u_n > 0$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.
3. Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$:
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{4}$$
4. Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : u_n \leq 8\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Exercice 3. On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - \frac{1}{2}u_{n-1} & (\forall n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

1. Calculer u_2 et u_3.
2. On considère la suite numérique (v_n) définie par $v_n = u_{n+1} - u_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.
   (a) Calculer v_0 et v_1.
   (b) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
   (c) Écrire le terme général v_n en fonction de n.
   (d) Déterminer la somme $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ en fonction de n.
3. Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = 7 - \frac{3}{2^n}$.

Exercice 4. On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n+1}{\sqrt{2u_n^2+2}} & (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$
$$1 - u_{n+1} = \frac{(1-u_n)^2}{\left(\sqrt{2u_n^2+2}\right)\left(\sqrt{2u_n^2+2} + u_n + 1\right)}$$
   (c) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n < 1$.
2. (a) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{|u_n - 1|}{\sqrt{u_n^2+1}} \leq 1$.
   (b) Déduire que $(\forall n \in \mathbb{N})$:
$$|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|u_n - 1|$$
   (c) Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N})$:
$$|u_n - 1| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$
   puis déduire un encadrement du terme u_4.

Exercice 5. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{5v_n - u_n}{2} & (\forall n \in \mathbb{N}) \\ u_0 = 3 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_{n+1} = \frac{4v_n - u_n}{3} & (\forall n \in \mathbb{N}) \\ v_n = 0 \end{cases}$$

On pose : $A_n = 5v_n - 2u_n$ et $B_n = 3v_n - u_n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

1. Montrer que (A_n) et (B_n) sont deux suites géométriques et déterminer leurs raisons.
2. Déterminer A_n et B_n en fonction de n.
3. Déterminer en fonction de n, les termes u_n et v_n.
4. Calculer en fonction de n la somme
$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

Exercice 6. On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} & (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

on pose $v_n = 2u_n - n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

1. Calculer u_1 et montrer par récurrence que $u_n \geq \frac{n}{2}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.
2. Étudier la monotonie de (u_n).
3. Montrer que (v_n) est une suite géométrique en déterminant sa raison.
4. (a) Montrer que $u_n = 2^n + \frac{1}{2}n$
   (b) Montrer que
$$u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1} = 2^n - 1 + \frac{n(n-1)}{4}$$

Suites numériques -TD-2

Exercice 1. On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 20 \\ u_{n+1} = 4n - u_n, \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2. Montrer que (u_{2n}) est une suite arithmétique.
3. Déterminer u_{2n} puis u_{2n+1} en fonction de n.

Exercice 2. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 2n, \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \\ u_0 = 2 \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = u_n - 4n + 8$$

1. Calculer u_1 et montrer par récurrence que $u_n \geq n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$.
2. Montrer que (v_n) est une suite géométrique en déterminant sa raison.
3. Calculer u_n en fonction de n.
4. Calculer $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$ en fonction de n, et déduire que $T_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$ en fonction de n.

Exercice 3.
On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n, \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

et on pose $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = 2^n u_n$.

1. Montrer que (v_n) est une suite ~~géométrique~~ arithmétique en déterminant sa raison.
2. Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \quad \text{et} \quad P_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$$

Montrer que $S_n = 3 - \frac{n+3}{2^n}$ et que

$$P_n = \frac{(n+1)!}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

On rappel que $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$, se lit factorielle n.

Exercice 4. On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n - 3}{4 - u_n}, \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

et on pose $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$.

1. Montrer par récurrence que $-1 \leq u_n \leq 3$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.
2. Étudier la monotonie de la suite (u_n).
3. (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique en déterminant sa raison.
   (b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.
4. Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ et $P_n = \prod_{k=1}^{n} u_k$.

Exercice 5. **(A)** On considère la fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}$$

et on pose $I = [0, 1]$

1. Montrer que $f(I) \subset I$.
2. Montrer que $f(x) \geq x$, $(\forall x \in I)$.

(B) Soit (u_n) une suite numérique définie par

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. Montrer que $0 < u_n < 1$, $(\forall n \in \mathbb{N})$
2. Montrer que la suite (u_n) est croissante.
3. (a) Montrer que $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{4}{5}|u_n - 1|$, $(\forall n \in \mathbb{N})$
   (b) Montrer que $|u_n - 1| \leq \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$, $(\forall n \in \mathbb{N})$.

Exercice 6. On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}, \quad (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

1. Montrer que $u_n > 2$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.
2. (a) Vérifier que $u_{n+1} - 2 = \dfrac{2(u_n - 2)}{u_n + 1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.
   (b) Montrer que $u_{n+1} - 2 \leq \frac{2}{3}(u_n - 2)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.
   (c) Déduire que $u_n - 2 \leq 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.
3. On pose $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \frac{2}{3}$ et déterminer v_0.
   (b) Calculer v_n en fonction de n, puis déduire que

$$u_n = \frac{\frac{3}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2}{\frac{3}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}$$

   (c) Calculer la somme $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

$\forall n \in \mathbb{N};\ 0 < U_n - 1 \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

4) Montrer que :
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$n < \sum_{k=0}^{n-1} U_k \leqslant n + \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$

Exercice 5 :
Soit (U_n) la suite numérique définie par :
$\begin{cases} U_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N};\ U_{n+1} = \frac{1}{3} U_n + n - 1 \end{cases}$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$V_n = 4U_n - 6n + 15$

1) Montrer que (V_n) est une suite géométrique ; et déterminer sa raison et son premier terme.

2) a- Ecrire V_n en fonction de n

b- En déduire que : pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_n = t_n + w_n$
avec : $t_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n}$

et $w_n = \frac{3}{2} n - \frac{15}{4}$

c- Montrer que (t_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$; et que (w_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{3}{2}$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$; on pose :
$T_n = t_0 + t_1 + t_2 + \cdots + t_n$
et $W_n = w_0 + w_1 + w_2 + \cdots + w_n$
et $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$

a) Calculer T_n et W_n en fonction de n :

b) Déduire S_n en fonction de n.

Exercice 6 :
On considère la suite (U_n) définie par :
$\forall n \in \mathbb{N}^*;\ U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

Etudier la monotonie de la suite (U_n).

Prof. Asma OULBAZ

$\forall n \in I\ |u_n| \leq M$

Les suites numériques — 1. Bac. SM

Exercice ① :

On considère la suite numérique (U_n) définie par: $U_0 = \frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}; U_{n+1} = U_n^2 - 2U_n + 2$

1) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}; 1 \leq U_n \leq \frac{3}{2}$
2) Montrer que la suite (U_n) est décroissante.

Exercice ② :

On considère la suite numérique (U_n) définie par:

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}; U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + \frac{1}{2}n + 1 \end{cases}$$

On pose: $\forall n \in \mathbb{N}; V_n = U_n - n$

1) Montrer que (V_n) est une suite géométrique; et déterminer sa raison et son premier.
2) Calculer V_n en fonction de n; puis en déduire U_n en fonction de n.
3) On pose; pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$. Calculer S_n en fonction de n

Exercice ③ :

On considère les deux suites numériques (U_n) et (V_n) définies par:

$$\begin{cases} U_0 = 4 \\ \forall n \in \mathbb{N}; U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + 3) \end{cases}$$

$\forall n \in \mathbb{N}; V_n = U_n - 3$

1) Montrer que (V_n) est une suite géométrique; et déterminer sa raison et son premier terme.
2) En déduire que: $\forall n \in \mathbb{N}; U_n = 3 + \frac{1}{2^n}$
3) Montrer que: (U_n) est une suite décroissante et minorée par 3.
4) On pose; pour tout $n \in \mathbb{N}$; $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + U_3 + \dots + U_n$
 . Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}; S_n = 3n + 5 - \frac{1}{2^n}$

Exercice ④ :

On considère la suite numérique (U_n) définie par:

$$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ \forall n \in \mathbb{N}; U_{n+1} = \dfrac{U_n^2 + U_n}{U_n^2 + 1} \end{cases}$$

1) Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}; U_n > 1$
2) Etudier la monotonie de la suite (U_n)
3) a)- Montrer que: $\forall n \in \mathbb{N}; U_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(U_n - 1)$

 b) En déduire que: